Inspectoratul Școlar Județean
Iași

Matematică

5+

Teste de antrenament
Bareme de notare

Proba E. c)

Ghid pentru pregătirea examenului de
BACALAUREAT 2020

- ***Filiera teoretică,*** *profilul real, specializarea matematică-informatică*
- ***Filiera tehnologică:*** *profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*
- ***Filiera vocaţională,*** *profilul pedagogic, specializarea învăţător-educatoare*
- ***Filiera teoretică,*** *profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii*

Coordonatori,

prof. dr. **Genoveva Aurelia FARCAȘ**
INSPECTOR ȘCOLAR GENERAL

prof. **Mihaela Mariana ȚURA**
INSPECTOR ȘCOLAR GENERAL ADJUNCT

prof. dr. **Irina CĂPRARU**
INSPECTOR ȘCOLAR I.S.J. IAȘI

prof. **Cristian PRAVĂȚ**
INSPECTOR ȘCOLAR I.S.J. IAȘI

Echipa de realizare a subiectelor și baremelor pentru testele de la disciplina

Matematică

prof. dr. Irina **Căpraru**, inspector școlar, I.S.J. Iași
prof. Cristian **Pravăț**, inspector școlar, I.S.J. Iași
prof. Constantin **Chirilă**, Colegiul Național ”Garabet Ibrăileanu” Iași
prof. Gheorghe **Iurea**, Liceul Teoretic ”Dimitrie Cantemir” Iași
prof. Monica **Nedelcu**, Colegiul Național ”Mihai Eminescu” Iași
prof. Gabriel **Popa**, Colegiul Național Iași
prof. Cristina **Timofte**, Liceul Teoretic de Informatică ”Grigore Moisil Iași”
prof. Simona **Blăjuți**, Liceul Teoretic ”Dimitrie Cantemir” Iași
prof. Mihaela **Bucătaru**, Colegiul Național ”Emil Racoviță” Iași
prof. Dorina **Carapanu**, Colegiul Național ”Garabet Ibrăileanu” Iași
prof. Alina **Crăciun**, Liceul Teoretic ”Miron Costin” Pașcani
prof. Dorinel Mihai **Crăciun**, Colegiul Național ”Mihail Sadoveanu” Pașcani
prof. Vasile Dorel **Luchian**, Colegiul Național ”Emil Racoviță” Iași
prof. Andrei **Plugariu**, Liceul Teoretic ”Dimitrie Cantemir” Iași
prof. Petru **Asaftei**, Colegiul Pedagogic ”Vasile Lupu” Iași
prof. dr. Amalia Patricia **Romila**, Colegiul Pedagogic ”Vasile Lupu” Iași
prof. Lidia **Lămătic**, Colegiul Tehnic ”Gh. Asachi” Iași
prof. Liliana Dana **Pipa**, Liceul Tehnologic de Mecatronică și Automatizări, Iași
prof. Teodor **Rebegea**, Colegiul Tehnic ”Gh. Asachi” Iași
prof. Mirela Roxana **Simon**, Liceul Tehnologic de Mecatronică și Automatizări, Iași
prof. Anca Voichița **Stoleriu**, Colegiul Tehnic ”Mihail Surdza”, Iași

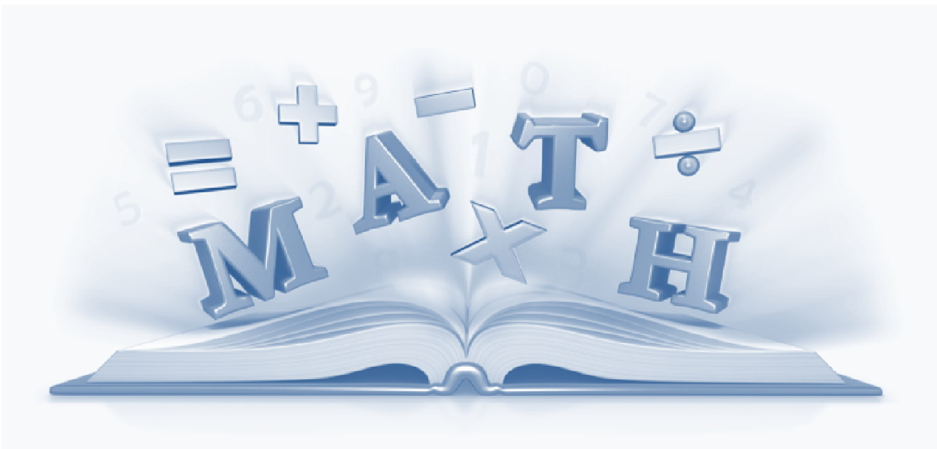
Tehnoredactare computerizată,
prof. **Iulieta Arseniuc**, Colegiul Tehnic „Ioan C. Ștefănescu” Iași
prof. **Emanuela Tatiana Pădurariu**, Colegiul Economic Administrativ Iași

Editura SPIRU HARET

ISBN 978-973-579-314-2

Casa Corpului Didactic ”Spiru Haret” Iași
Str. Octav Botez 2 A, Iași, 700116
Telefon: 0232/210424; fax: 0232/210424
E-mail: ccdiasi@gmail.com, Web: www.ccdis.ro

Cuprins


MATH

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Model de antrenament TEST 1

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătaţi că $\left(1+i\sqrt{3}\right)^6=64$

5p **2.** Demonstraţi că vârful parabolei $y=x^2-2x-2$ se află pe dreapta $d: y=-3$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x-\sqrt{2-x}=0$.

5p 4. Câte funcţii f : {1, 2, 3, 4}⟶ {1, 2, 3, 4} au proprietatea că f(1) · f(2) · f(3) · f(4) = 6?

5p **4.** Triunghiul ABC este echilateral, de latură $AB=2$. Calculaţi $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$.

5p **5.** Lungimile laturilor triunghiului ABC sunt $AB=10,\ AC=24,\ BC=26$. Arătaţi că raza cercului circumscris triunghiului este $R=13$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+3y+4z=0 \\ 3x+4y+5z=0 \end{cases}$. Fie $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$ matricea sistemului.

5p a) Arătaţi că rangul matricei A este egal cu 2.

5p b) Rezolvaţi în $\mathbb{R}^3$ sistemul dat.

5p c) Daţi un exemplu de matrice $B\in M_3(\mathbb{R}),\ B\neq O_3,$ astfel încât $AB=O_3$.

2. Se consideră mulţimea. $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix} \middle| a,b\in Q\right\}$

5p a) Arătaţi că $O_2\in G$ şi $I_2\in G$.

5p b) Demonstraţi că $A\cdot B\in G$, oricare ar fi $A,B\in G$.

5p c) Dacă $A\in G$, $A\neq O_2$, demonstraţi că matricea A este inversabilă, iar $A^{-1}\in G$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sin x-\cos x$.

5p a) Arătaţi că $f'(x)=\sin x+\cos x$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p b) Demonstraţi că funcţia f are o infinitate de puncte de extrem local.

5p c) Determinaţi imaginea funcţiei f.

2. Se consideră funcţia. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3+x$.

5p a) Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{3}{4}$.

5p b) Fie F o primitivă a funcţiei continue f. Demonstraţi că F este funcţie convexă.

5p c) Admitem că funcţia f este inversabilă şi fie g inversa sa. Calculaţi $\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x$.

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

TEST 1

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\left(1+i\sqrt{3}\right)^2=2\left(-1+i\sqrt{3}\right)$ $\left(1+i\sqrt{3}\right)^6=8\left(-1+i\sqrt{3}\right)^3=8\cdot 8=64$	**2p** **3p**
2.	$y_V=-\dfrac{\Delta}{4a}=-3$ $V\in d$	**3p** **2p**
3.	$x=\sqrt{2-x}\Rightarrow x^2+x-2=0$ Soluţiile acestei ecuaţii sunt $x_1=1,\ x_2=-2$. Convine doar prima soluţie, deci $S=\{1\}$.	**2p** **1p** **2p**
4.	Unul dintre numerele $f(1),f(2),f(3),f(4)$ este egal cu 3, un altul este egal cu 2, iar celelalte două sunt egale cu 1. Există $4\cdot 3=12$ funcţii cu proprietatea dată.	**2p** **3p**
5.	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=AB\cdot BC\cdot\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=$ $=2\cdot 2\cdot\cos 120^0=$ $=-2$	**2p** **2p** **1p**
6.	Triunghiul ABC este dreptunghic, cu ipotenuza BC. Rezultă că $R=\dfrac{1}{2}BC=13$.	**3p** **2p**

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1.a)	$\det A=0$ exemplu de un minor de ordin doi nenul	**3p** **2p**
b)	Sistemul este compatibil nedeterminat. Considerăm z=α, α ∈ R drept necunoscută secundară. Soluţia sistemului este $S=\{(\alpha,-2\alpha,\alpha)\mid\alpha\in R\}$.	**2p** **3p**
c)	Considerăm, de exemplu, $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\-2&-2&-2\\1&1&1\end{pmatrix}$ şi se verifică egalitatea $AB=O_3$.	**3p** **2p**
2.a)	$O_2\in G$ $I_2\in G$	**2p** **3p**
b)	$A\cdot B\in G\ \Rightarrow A=\begin{pmatrix}a&b\\3b&a\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}c&d\\3d&c\end{pmatrix}, a,b,c,d\in\mathbb{Q}$ $A\cdot B=\begin{pmatrix}ac+3bd&ad+bc\\3(ad+bc)&ac+3bd\end{pmatrix}$, $ac+3bd,\ ad+bc\in\mathbb{Q}\Rightarrow A\cdot B\in G$	**2p** **3p**
c)	Fie $A=\begin{pmatrix}a&b\\3b&a\end{pmatrix}$, a, b∈ $\mathbb{Q}$ o matrice din G; atunci $\det A=a^2-3b^2$. Dacă $\det A=0$, obţinem că $a=\pm b\sqrt{3}$. Cum a, b ∈ Q şi $\sqrt{3}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, rezultă că $a=b=0$. Deducem că matricele nenule din G au determinantul nenul, deci sunt inversabile. Dacă $A\in G$, $A\neq O_2$, atunci $A^{-1}=\begin{pmatrix}a'&b'\\3b'&a'\end{pmatrix}$, unde, $a'=\frac{a}{a^2-3b^2}\in Q, b'=\frac{-b}{a^2-3b^2}\in Q$ aşadar $A^{-1}\in G$	**2p** **3p**

SUBIECTUL III **(30 de puncte)**

1.a)	$(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$ $f'(x) = \sin x + \cos x$	**2p** **2p** **1p**
b)	Pentru $x \in [0, 2\pi]$, avem: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$; $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$; $f'(x) > 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$. Rezultă că funcţia f este strict crescătoare pe $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right)$ şi $\left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$, iar pe intervalul $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$ este strict descrescătoare. Atunci $x_1 = \frac{3\pi}{4}$ este punct de maxim, iar $x_2 = \frac{7\pi}{4}$ este punct de minim. Cum *f* este periodică, având perioada principală 2π, obţinem că $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ sunt punctele de maxim ale funcţiei *f*, iar $\frac{7\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ sunt punctele de minim ale funcţiei *f*.	**3p** **2p**
c)	Din monotonia funcţiei *f* pe intervalul $[0, 2\pi]$ şi $f(0) = 1, f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}, f\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}, f(2\pi) = 1$, obţinem că $f([0, 2\pi]) \subseteq \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$. Ţinând cont şi de continuitate, rezultă că $f([0, 2\pi]) = \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$. Cum *f* este periodică, având perioada principală 2π, înseamnă că $\operatorname{Im} f = \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$.	**2p** **2p** **1p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)\,dx = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right)\Big\|_0^1 = = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}. = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$	**3p** **2p**
b)	Funcţia *F* este de două ori derivabilă, iar $F''(x) = 3x^2 + 1$. Cum $F''(x) = 3x^2 + 1 > 0$, $\forall x \in R$, rezultă că *F* este o funcţie convexă.	**3p** **2p**
c)	Facem substituţia $x = f(t)$, $t \in [0, 1]$ şi obţinem că $\int_0^2 g(x)\,dx = \int_0^1 g(f(t)) f'(t)\,dt =$ $= \int_0^1 t(3t^2 + 1)\,dt = 3 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$.	**3p** **2p**

„***Dumnezeu a creat numerele naturale. Restul este opera omului***." spunea **Leopold Kronecker** (matematician german). Matematica, după cum aţi aflat deja, a fost creată datorita necesităţii omului de a avea control asupra obiectelor care îl înconjoară. **Karl GAUSS** spunea „***Regina ştiinţelor este matematica, iar aritmetica este regina matematici***i" şi ca şi orice regină ea are pe lângă partea sa sobră o parte ludică.

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Model de antrenament **TEST 2**

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1**. Determinați $a, b \in R$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe:
(3+i)(1-i) $= a+bi$.

5p **2**. Să se determine cel mai mic număr real a, pentru care funcția f : ℝ → ℝ, $f(x) = x^2 - 4x + 10$ este strict crescătoare pe intervalul $[a;+\infty)$.

5p **3**. Arătați că funcția $f: (-1,1) \to R, f(x) = log_3 \frac{1-x}{1+x}$ este impară.

5p **4**. Să se determine numerele naturale n, $n \geq 5$, astfel încât $C_n^3 = C_n^5$.

5p **5**. Se consideră punctele $M(1,2), N(2,5)$ și $P(3, m), m \in \mathbb{R}$. Să se determine valorile reale ale lui m astfel încât $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} = 5$.

5p **6**. Fie ABC un triunghi care are BC = 12 și $\cos A = \frac{4}{5}$. Să se determine lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Fie A matricea pătratică de ordinul 3 cu toate elementele egale cu 1.

5p a) Determinați numerele naturale n pentru care $\det\left(A^n + I_3\right) = 82$.

5p b) Fie matricea $B = a \cdot I_3 + A$. Aflați $a \in \mathbb{R}$ pentru care B este inversabilă.

5p c) Demonstrați că matricea B este inversabilă pentru a = 1 și că $B^{-1} = I_3 - \frac{1}{4}A$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă: $x * y = 3xy + 2x + 2y + \frac{2}{3}$

5p a) Demonstrați că $x * y = 3\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(y + \frac{2}{3}\right) - \frac{2}{3}$, pentru orice numere reale x și y .

5p b) Determinați numărul real x pentru care $x * x * x = -\frac{1}{3}$.

5p c) Determinați numerele reale a, știind că $f(x) * f(y) = f(x+y)$, pentru orice numere reale x și y, unde f:ℝ→ℝ, $f(x) = ae^x - \frac{2}{3}$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Fie funcția f:ℝ→ℝ, $f(x) = (x^2 - 3)e^{-x}$

5p a) Determinați ecuația asimptotei la $+\infty$ la graficul funcției f.

5p b) Arătați că f are două puncte de extrem.

5p c) Determinați $m \in \mathbb{R}$, astfel încât ecuația $f(x) = m$ să aibă trei soluții reale distincte.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n \geq 1}, I_n = \int_0^1 x^n \sin x dx$.

5p a) Să se calculeze I_1 .

5p b) Să se arate că șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este convergent.

5p c) Să se demonstreze că $I_{2n} + 2n(2n-1)I_{2n-2} = 2n \sin 1 - \cos 1, \forall n \geq 2$.

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

TEST 2

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1	$(3+i)(1-i)=4-2i$	**3p**
	$(a+bi)=4-2i \Rightarrow (a,b)=(4;-2)$	**2p**
2	$a=1>0 \Rightarrow f$ este strict crescătoare, dacă $x\in[2,+\infty)$	**3p**
	a este minim $\Rightarrow a=2$	**2p**
3	f este impară $\Leftrightarrow f(-x)=-f(x), \forall x\in(-1,1)$; avem $f(-x)=\log_3\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$	**2p**
	$f(-x)=\log_3\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1}=-\log_3\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=-f(x)$	**3p**
4	$C_n^3=C_n^5 \Leftrightarrow (n-4)(n-3)=4\cdot 5 \Leftrightarrow n^2-7n-8=0$	**3p**
	$n_1=-1, n_2=8$; dar $n\geq 5 \Rightarrow n=8$	**2p**
5	$\overrightarrow{MN}=(2-1)\vec{i}+(5-2)\vec{j}=\vec{i}+3\vec{j}$; $\overrightarrow{MP}=2\vec{i}+(m-2)\vec{j}$; $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP}=3m-4$	**3p**
	$3m-4=5 \Rightarrow m=3\ \vec{j}$	**2p**
6	$A\in(0,\pi)\Rightarrow \sin A>0;\ \sin A=\frac{3}{5}$	**2p**
	$\frac{BC}{\sin A}=2R\Rightarrow R=\frac{12}{2\cdot\frac{3}{5}}=10$ cm.	**3p**

SUBIECTUL II **(30 de puncte)**

1.a)	$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$,iar $A^n=3^{n-1}\cdot A, n\geq 1$ (inducție)	**2p**
	$\det(A^n+I_3)=3^n+1;\ 3^n+1=82\Rightarrow n=4$	**3p**
b)	$B=\begin{pmatrix}a+1&1&1\\1&a+1&1\\1&1&a+1\end{pmatrix}$; B este inversabilă $\Leftrightarrow \det B\neq 0$	**2p**
	$detB=a^2(a+3); a\in\mathbb{R}-\{-3,0\}$	**3p**
c)	$a=1\Rightarrow B=I_3+A$	**1p**
	$B\cdot B^{-1}=(I_3+A)\left(I_3-\frac{1}{4}A\right)=I_3-\frac{1}{4}A+A-\frac{1}{4}A^2=I_3+\frac{3}{4}A-\frac{3}{4}A=I_3$	**2p**
	$B^{-1}\cdot B=\left(I_3-\frac{1}{4}A\right)(I_3+A)=I_3+A-\frac{1}{4}A-\frac{1}{4}A^2=I_3$	**2p**
2.a)	$x*y=3xy+2x+2y+\frac{4}{3}-\frac{2}{3}=$	**2p**
	$=3x\left(y+\frac{2}{3}\right)+2\left(y+\frac{2}{3}\right)-\frac{2}{3}=3\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(y+\frac{2}{3}\right)-\frac{2}{3}$, pentru orice numere reale x și y	**3p**

b)	$x * x = 3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{2}{3};\ x * x * x = 9\left(x+\frac{2}{3}\right)^3 - \frac{2}{3}$, pentru orice număr real x	**2p**
	$9\left(x+\frac{2}{3}\right)^3 - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \left(x+\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{1}{27} \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$	**3p**
c)	$3\left(ae^x - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right)\left(ae^y - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right) - \frac{2}{3} = ae^{x+y} - \frac{2}{3}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
	$3a^2 = a$, deci $a = 0$ sau $a = \frac{1}{3}$	**3p**

SUBIECTUL III **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-3}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = 0$	**3p**
	Ecuația asimptotei la $+\infty$: $y = 0$. Graficul lui f nu admite asimptote oblice la $+\infty$.	**2p**
b)	$f'(x) = \left(-x^2+2x+3\right)e^{-x};\ f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 3$	**1p**
	Dacă $x \in (-\infty;-1)$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ strict descrescătoare; dacă $x \in (-1;3)$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ este crescătoare. Deducem $x = -1$ este punct de minim.	**2p**
	Dacă $x \in (-1;3)$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ este crescătoare, dacă $x \in (3;+\infty)$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ strict descrescătoare. Deducem $x = 3$ este punct de maxim.	**2p**
c)	Funcția $g: R \to R, g(x) = f(x) - m$ este derivabilă cu $g'(x) = f'(x)$, iar $g'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 3$.	
	$\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = -m;\ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty;\ g(-1) = -m-2e;\ g(3) = \frac{6}{e^3} - m$	**2p**
	Folosind șirul lui Rolle, ecuația are trei soluții reale distincte dacă $m \in \left(0;\frac{6}{e^3}\right)$	**3p**
2.a)	$I_1 = \int_0^1 x\sin x dx = -x\cos x\Big\vert_0^1 + \int_0^1 \cos x dx =$	**3p**
	$= -\cos 1 + \sin x\Big\vert_0^1 = \sin 1 - \cos 1$	**2p**
b)	$x \in [0,1] \Rightarrow x^{n+1} \le x^n; [0,1] \subset \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \sin x \ge 0, \forall x \in [0,1] \Rightarrow x^{n+1}\sin x \le x^n \sin x, \forall x \in [0,1] \Rightarrow$ $\Rightarrow I_{n+1} \le I_n \Rightarrow (I_n)_{n\ge1}$ este descrescător	**3p**
	$0 \le \int_0^1 x^n \sin x dx \le \frac{1}{n+1} < 1, \forall n \ge 1$ $(I_n)_{n\ge1}$ este descrescător și mărginit $\Rightarrow (I_n)_{n\ge1}$ este convergent	**2p**
c)	$I_{2n} = \int_0^1 x^{2n}(-\cos x)'dx = -x^{2n}\cos x\Big\vert_0^1 + 2n\int_0^1 x^{2n-1}(\sin x)'dx =$ $= -\cos 1 + 2n\left(x^{2n-1}\sin x\Big\vert_0^1 - (2n-1)\int_0^1 x^{2n-2}\sin x dx\right) =$	**3p**
	$= -\cos 1 + 2n\sin 1 - 2n(2n-1)I_{2n-2}$, de unde obținem relația dorită	**2p**

„O teoremă e o scrisoare de dragoste către un necunoscut, către acela care îi prinde nu numai înţelesul, ci şi toate subînţelesurile.”

Grigore Moisil

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Model de antrenament **TEST 3**

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1**. Ordonați crescător numerele $a=8^{\frac{2}{3}}$, $b=\log_3 27$ și $c=\sqrt[4]{101}$.

5p **2.** Scrieți o ecuație de gradul al doilea care are soluțiile $x_1=3+2i$ și $x_2=3-2i$.

5p **3**. Rezolvați în mulţimea numerelor reale inecuaţia $2^{\frac{1}{x-2}}\le\sqrt{2}$.

5p **4**. Câte submulţimi cu 4 elemente ale mulțimii $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ conțin 7 și nu conțin 1 ?

5p **5**.Aflați $m\in\mathbb{R}$ pentru care distanța de la punctul $M(m,-1)$ la dreapta de ecuație $4x-3y+11=0$ este egală cu 6.

5p **6**. Dacă, $\sin x+cosx=\frac{1}{\sqrt{6}}$ aflați $\sin 2x$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A(a)=\begin{pmatrix}a & 1 & -2\\ 1 & -2 & 1\\ 3 & 0 & -1\end{pmatrix}$ și $B(b)=\begin{pmatrix}3\\0\\b\end{pmatrix}$, cu $a,b\in\mathbb{R}$

5p a) Calculați $A(6)\cdot B(3)$ - $B(6)$.

5p b) Aflați $a\in\mathbb{R}$ pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.

5p c) Determinați perechea $(a,b)\in\mathbb{R}x\mathbb{R}$ pentru care există o infinitate de matrice $X\in M_{3,1}(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $A(a)\cdot X=B(b)$.

2. Pe mulţimea $G=(-1,1)$ se consideră legea de compoziție asociativă „$\circ$”, definită prin $x\circ y=\frac{x+y}{1+xy}$.

5p a) Arătaţi că legea „$\circ$” admite element neutru.

5p b) Admitem că $(G,\circ)$ este grup. Arătați că funcția $f:(-1,1)\to(0,+\infty), f(x)=\frac{1-x}{1+x}$ reprezintă un morfism între grupurile $(G,\circ)$ și $((0,+\infty),\cdot)$.

5p c) Calculați $\frac{1}{2}\circ\frac{1}{3}\circ\frac{1}{4}\circ.....\circ\frac{1}{9}$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\setminus\left\{\frac{1}{e}\right\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x}{1+lnx}$.

5p a) Studiați existența asimptotelor verticale la graficul funcției f.

5p b) Determinați punctul de pe graficul funcției f, în care tangenta la grafic este paralelă cu dreapta de ecuație x – 4y + 2020 = 0

5p c) Comparați numerele $\alpha=f\left(\sqrt{10}\right)$ și $\beta=\frac{3}{\ln(3e)}$.

2. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^{x^2-1}$ și $F:R\to R, F(x)=\int_1^x f(t)dt$.

5p a) Arătați că $\int_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{e-1}{2e}$.

5p b) Calculați $\lim_{x\to 1}\frac{F(x)}{x^2-1}$.

5p c) Calculați $\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x$.

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

TEST 3

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a=2^{3\cdot\frac{2}{3}}=4;\ \ b=3$	**2p**
	$81<101<256\Rightarrow 3<\sqrt[4]{101}<4$, adică $b<c<a$.	**3p**
2.	$S=x_1+x_2=6$, $P=x_1x_2=13$	**3p**
	Ecuația este $x^2-6x+13=0$.	**2p**
3.	$2^{\frac{1}{x-2}}\le 2^{\frac{1}{2}}\Rightarrow\frac{1}{x-2}\le\frac{1}{2}$, adică $\frac{4-x}{2(x-2)}\le 0$	**3p**
	Mulțimea soluțiilor acestei inecuaţii este $(-\infty,2)\cup[4,+\infty)$.	**2p**
4.	Submulțimile cerute sunt de forma $\{7,a,b,c\}$, unde $\{a,b,c\}\subset\{2,3,4,5,6,8,9\}$	**2p**
	Există C_7^3 astfel de submulțimi, adică 35.	**3p**
5.	$d=\frac{\lvert 4m+3+11\rvert}{\sqrt{16+9}}$	**2p**
	$d=6\Rightarrow\lvert 4m+14\rvert=30$	**1p**
	Soluțiile sunt $m_1=4$, $m_2=-11$.	**2p**
6.	Ridicând la pătrat relația dată, se obține $\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x=\frac{1}{6}$	**2p**
	Cum $\sin 2x=2\sin x\cos x$, obținem $\sin 2x=\frac{5}{6}$.	**3p**

SUBIECTUL II **(30 de puncte)**

1.a)	$A(6)\cdot B(3)=\begin{pmatrix}6&1&-2\\1&-2&1\\3&0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\6\\6\end{pmatrix}$	**3p**
	$A(6)\cdot B(3)-B(6)=\begin{pmatrix}12\\6\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\6\\0\end{pmatrix}$	**2p**
b)	$\det A(a)=2a-8$	**2p**
	Matricea $A(a)$ este inversabilă $\Leftrightarrow$ $\det A(a)\neq 0$. Adică $a\in\mathbb{R}\setminus\{4\}$.	**3p**
c)	Dacă $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, ecuația $A(a)\cdot X=B(b)$ devine sistemul (S) $\begin{cases}ax+y-2z=3\\x-2y+z=0\\3x-z=b\end{cases}$	**1p**
	Pentru a exista o infinitate de matrice X, sistemul (S) trebuie să fie compatibil nedeterminat. Adică $\det A=0$, $\Delta_{car}=0\Rightarrow 2a-8=0,\ \ 18-9b=0$	**3p**
	$(a,b)=(4,2)$	**1p**
2.a)	Există $e\in G$, cu proprietatea $x\circ e=e\circ x=x$, $\forall x\in G$	**2p**
	$e=0$	**3p**

b)	f este morfism dacă $f(x\circ y)=f(x)\cdot f(y)$, pentru orice $x,y\in G$ $f(x\circ y)=f\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)=\dfrac{1+xy-x-y}{1+xy+x+y}$ $f(x)\cdot f(y)=\dfrac{1-x}{1+x}\cdot\dfrac{1-y}{1+y}=\dfrac{1+xy-x-y}{1+xy+x+y}$. Concluzia	**1p** **2p** **2p**
c)	f morfism $\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\circ\frac{1}{3}\circ....\circ\frac{1}{9}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot f\left(\frac{1}{3}\right)\cdot.....\cdot f\left(\frac{1}{9}\right)$ $f\left(\frac{1}{k}\right)=\frac{k-1}{k+1}$, deci $f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot f\left(\frac{1}{3}\right)\cdot....\cdot f\left(\frac{1}{9}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{5}\cdot....\cdot\frac{8}{10}=\frac{1}{45}$ $f\left(\frac{1}{2}\circ\frac{1}{3}\circ....\circ\frac{1}{9}\right)=\frac{1}{45}\Rightarrow\frac{1}{2}\circ\frac{1}{3}\circ....\circ\frac{1}{9}=\frac{22}{23}$.	**1p** **2p** **2p**

SUBIECTUL III **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ $\lim\limits_{x\to \frac{1}{e}} f(x)=-\infty;\ \lim\limits_{x\to \frac{1}{e}} f(x)=+\infty$ Graficul funcției admite o asimptotă verticală de ecuație $x=\frac{1}{e}$	**1p** **2p** **2p**
b)	$f'(x)=\dfrac{1+\ln x-x\cdot\frac{1}{x}}{(1+\ln x)^2}=\dfrac{\ln x}{(1+\ln x)^2}$ Panta dreptei este $\frac{1}{4}$, deci și panta tangentei este egală cu $\frac{1}{4}$. Vom căuta un punct $a\in(0,+\infty)\setminus\left\{\frac{1}{e}\right\}$ pentru care $f'(a)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\dfrac{\ln a}{(1+\ln a)^2}=\frac{1}{4}$. Se obține $a=e$, deci punctul cerut este $A\left(e,\frac{e}{2}\right)$.	**2p** **2p** **1p**
c)	$f(3)=\dfrac{3}{1+\ln 3}=\dfrac{3}{\ln e+\ln 3}=\beta$ $f'(x)>0$ pentru orice $x\in(1,+\infty)$, deci f este strict crescătoare pe $(1,+\infty)$ $3<\sqrt{10}\Rightarrow f(3)<f(\sqrt{10})$. Deci $\beta<\alpha$.	**1p** **2p** **2p**
2.a)	$\int_0^1 xf(x)\,dx=\int_0^1 xe^{x^2-1}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^0 e^t\,dt$, cu substituția $x^2-1=t$ $=\frac{1}{2}e^t\Big\|_{-1}^0=\dfrac{e^0-e^{-1}}{2}=\dfrac{e-1}{2e}$	**3p** **2p**
b)	$F(1)=0$, limita este de tip $\frac{0}{0}$. $F'(x)=f(x)$ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{F'(x)}{(x^2-1)'}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x^2-1}}{2x}=\dfrac{1}{2}$	**2p** **3p**
c)	Integrala se calculează prin părți: $\int_0^1 x'\cdot F(x)\,dx=xF(x)\Big\|_0^1-\int_0^1 xF'(x)\,dx$ $=F(1)-0-\int_0^1 xf(x)\,dx=-\int_0^1 xf(x)\,dx=-\dfrac{e-1}{2e}$	**3p** **2p**

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Model de antrenament TEST 4

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1**. Determinați modulul numărului complex $z=\left(1+i\sqrt{3}\right)^2-2i\sqrt{3}$.

5p **2**.Determinați punctele de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-2x+3$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=4x-6$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $9^x-10\cdot 3^{x-1}+1=0$.

5p **4**. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă două cifre egale.

5p **5**.Să se consideră ΔABC și punctele M, N și P astfel încât $\overrightarrow{AB}=2\cdot\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BC}=2\cdot\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{CA}=2\cdot\overrightarrow{CP}$ Știind că O este un punct oarecare din plan, arătați că $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

5p **6**. Să se calculeze lungimea laturii BC a triunghiului ascuțitunghic ABC dacă $AB = 6$, $AC = 10$ și aria triunghiului ABC este egală cu $15\sqrt{3}$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Se consideră permutarea $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&2&5&4\end{pmatrix}\in S_5$.

5p a) Să se calculeze σ^{2020} .

5p b) Să se dea exemplu de o permutare $\tau\in S_5$ astfel încât $\tau\sigma\neq e$ și $(\tau\sigma)^2=e$.

5p c) Să se demonstreze că, pentru orice $\sigma\in S_5$,există $p\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $\sigma^p=e$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă: $x*y=-\frac{2}{3}xy+x+y$.

5p a) Demonstrați că $x*y=-\frac{2}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}$, pentru orice numere reale x și y .

5p b) Calculați $\frac{1}{2}*\frac{2}{2}*\frac{3}{2}*\ldots*\frac{2020}{2}$ ..

5p c) Știind că ($\mathbb{R}$, $*$) este grup, demonstrați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-\frac{2}{3}x+1$ este un izomorfism între grupurile ($\mathbb{R}$, $*$) și ($\mathbb{R}$, $\cdot$), unde „$\cdot$” este operația de înmulțire a numerelor reale.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}-\{-2\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x+2}e^x$

5p a) Determinați asimptotele funcției f .

5p b) Determinați punctele de extrem ale funcției f.

5p c) Determinați m$\in\mathbb{R}$ pentru care ecuația $f(x)=m$ are o singură soluție.

2. Se dă funcția $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+\frac{3}{x+1}$

5p a) Arătați că $\int_0^2\left(f(x)-x^2\right)dx=3\ln 3$.

5p b) Calculați $\int_1^2\left(f(x)-\frac{3}{x+1}\right)e^x dx$

5p c) Determinați $a\in(0,+\infty)$ pentru care $\int_0^1 2f(x)F(x)dx=\frac{1}{9}+\ln 4+\ln^2 a$, unde F este primitiva funcției f pentru care $F(0) = 0$.

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

TEST 4

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z=-2$ $\lvert z\rvert=2$	**3p** **2p**
2.	$\begin{cases} f(x)=x^2-2x+3 \\ g(x)=4x-6 \end{cases} \Rightarrow x^2-2x+3=4x-6$ $x^2-6x+9=0 \Leftrightarrow (x-3)^2=0$. Obținem punctul de coordonate (3; 6)	**2p** **3p**
3.	$3\cdot 3^{2x}-10\cdot 3^x+3=0$ $3^x=3^{-1}\Rightarrow x=-1$ sau $3^x=3\Rightarrow x=1$; convin ambele valori ale lui x .	**2p** **3p**
4.	Numărul cazurilor posibile: sunt $9\cdot 10\cdot 10=900$ numere cu trei cifre. Numerele alese au forma $\overline{aab},\ \overline{aba}, \overline{baa},\quad a\neq b$ Numărul cazurilor favorabile: $9\cdot 1\cdot 9+9\cdot 9\cdot 1+9\cdot 9\cdot 1=243$ $\Rightarrow p=\dfrac{243}{900}=\dfrac{27}{100}=0,27$	**2p** **2p** **1p**
5.	$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}=\left(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AO}\right)+\left(\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{BO}\right)+\left(\overrightarrow{CP}-\overrightarrow{CO}\right)=$ $=\dfrac{1}{2}\underbrace{\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)}_{=0}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$	**2p** **3p**
6.	$A[ABC]=\dfrac{AB\cdot AC\cdot\sin(BAC)}{2}=30\cdot\sin(BAC)=15\sqrt{3}\Rightarrow$ $\Rightarrow\sin(BAC)=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ A\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow A=\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow\cos A=\dfrac{1}{2}\Rightarrow BC=2\sqrt{19}$	**2p** **3p**

SUBIECTUL II **(30 de puncte)**

1.a)	$\sigma^6=e$ $\sigma^{2020}=\left(\sigma^6\right)^{336}\cdot\sigma^4$. $\sigma^4=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&2&4&5\end{pmatrix}$	**2p** **3p**
b)	Cum $\sigma^6=e$, putem alege $\tau=\sigma^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&1&4&5\end{pmatrix}$; $\tau\sigma=\sigma^2\cdot\sigma=\sigma^3=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&3&5&4\end{pmatrix}$, iar $(\tau\sigma)^2=\left(\sigma^2\cdot\sigma\right)^2=\left(\sigma^3\right)^2=e$	**3p** **2p**
c)	Pentru orice $n\in\mathbb{N}\Rightarrow\sigma^n\in S_5,\ cardS_5=5!=120$ Există $k,\ r\in\mathbb{N}^*$, $r>k$ astfel încât $\sigma^r=\sigma^k\Rightarrow\sigma^{r-k}=e$. Obținem $p=r-k\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $\sigma^p=e$	**2p** **3p**
2.a)	$x*y=-\dfrac{2}{3}xy+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{2}x+y=-\dfrac{2}{3}x\left(y-\dfrac{3}{2}\right)+y-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}=$ $=\left(y-\dfrac{3}{2}\right)\left(-\dfrac{2}{3}x+1\right)+\dfrac{3}{2}=-\dfrac{2}{3}\left(x-\dfrac{3}{2}\right)\left(y-\dfrac{3}{2}\right)+\dfrac{3}{2}$, pentru orice numere reale x și y	**3p** **2p**
b)	$x*\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}$ și $\dfrac{3}{2}*y=\dfrac{3}{2}$, unde x și y sunt numere reale.	**3p**

	$\frac{1}{2}*\frac{2}{2}*\frac{3}{2}*\ldots*\frac{2020}{2}=\left(\left(\frac{1}{2}*\frac{2}{2}\right)*\frac{3}{2}\right)*\left(\frac{4}{2}*\ldots*\frac{2020}{2}\right)=\frac{3}{2}*\left(\frac{4}{2}*\ldots*\frac{2020}{2}\right)=\frac{3}{2}$	**2p**
c)	$f\left(x*y\right)=\frac{4}{9}xy-\frac{2}{3}(x+y)+1=f\left(x\right)\cdot f\left(y\right)$, pentru orice x, y numere reale, deci f este un morfism de la grupul $(\mathbb{R},*)$ la grupul $(\mathbb{R},\cdot)$	**3p**
	Funcția f este funcție de gradul întâi, așadar este bijectivă, prin urmare, f este izomorfism de la grupul $(\mathbb{R},*)$ la grupul $(\mathbb{R},\cdot)$.	**2p**

SUBIECTUL III **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f\left(x\right)=-\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f\left(x\right)=+\infty$, ecuația asimptotei verticale $x=-2$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0\Rightarrow y=0$ este ecuația asimptotei orizontale la $-\infty$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$, nu există asimptotă orizontală la $+\infty$	**2p**
	Graficul funcției nu admite asimptote oblice.	**1p**
b)	$f'(x)=\frac{x+1}{(x+2)^2}e^x, x\in\mathbb{R}-\{-2\}$	**2p**
	$x=-1$ este punct de minim	**3p**
c)	Dacă $x\in\left(-\infty,-2\right)$, $f'\left(x\right)<0$, f este strict descrescătoare continuă, $f\left(\left(-\infty,-2\right)\right)=\left(-\infty,0\right)$. Dacă $m<0$, ecuația $f(x)=m$ are o singură soluție $x_0\in\left(-\infty,-2\right)$	**2p**
	$f\left(\left(-2,+\infty\right)\right)=\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$; ecuația $f(x)=m$ are două soluții dacă $m\in\left(\frac{1}{e},\infty\right)$,	**2p**
	Dacă $m\in\left(-\infty,0\right)\cup\left\{\frac{1}{e}\right\}$, ecuația $f(x)=m$ admite o singură soluție.	**1p**
2.a)	$\int_0^2\left(f(x)-x^2\right)dx=\int_0^2\frac{3}{x+1}dx=$	**2p**
	$=3\ln\left(x+1\right)\Big\|_0^2=3\ln 3$	**3p**
b)	$\int_1^2\left(f(x)-\frac{3}{x+1}\right)e^x dx=\int_1^2 x^2e^x dx=x^2e^x\Big\|_1^2-2\int_1^2 xe^x dx=$	**2p**
	$=4e^2-e-2\left(xe^x-e^x\right)\Big\|_1^2=2e^2-e$	**3p**
c)	Dacă F este primitiva funcției f atunci F este derivabilă pe $\left(-1,+\infty\right)$, $F'\left(x\right)=f\left(x\right)$ și $F\left(0\right)=0$. Obținem: $F\left(x\right)=\frac{x^3}{3}+3\ln\left(x+1\right)$.	**1p**
	$2\int_0^1 F\left(x\right)F'\left(x\right)dx=F^2\left(x\right)\Big\|_0^1=F^2\left(1\right)=\frac{1}{9}+2\ln 2+9\ln^2\left(2\right)$	**2p**
	Obținem $\ln a=3\ln 2$, adică $a=8$, respectiv $\ln a=-3\ln 2$, adică $a=\frac{1}{8}$	**2p**

„Cea mai înaltă formă a gândirii pure există în matematică”

Platon

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Model de antrenament **TEST 5**

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Dacă $z = 2 - i$, arătați că numărul $z + \frac{5}{z}$ este real.

5p **2.** Se consideră funcția $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $f(x) = 3x + \sqrt{x}$. Calculați $(f \circ f)(1)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $2^x = \left(\frac{1}{4}\right)^{1-x}$.

5p **4.** Aflați probabilitatea ca alegând, la întâmplare, un număr natural de trei cifre, acesta să aibă produsul cifrelor un număr par.

5p **5.** În reperul cartezian XOY se consideră punctele $A(1,-4)$ și $B(2,-2)$. Dreapta AB intersectează axa OX în punctul M. Determinați coordonatele punctului M.

5p **6.** Dacă $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin x = \frac{3}{5}$, calculați $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Pentru fiecare $x \in (0,\infty)$ se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & \ln x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$.

5p a) Arătați că $A(a) \cdot A(b) = A(ab)$, pentru orice a și b numere reale pozitive.

5p b) Determinați inversa matricei $A(x)$, $x \in (0,\infty)$.

5p c) Calculați determinantul matricei $B = A\left(\frac{1}{1\cdot 2}\right) + A\left(\frac{1}{2\cdot 3}\right) + \dots + A\left(\frac{1}{2019\cdot 2020}\right)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție

$$x \circ y = 2xy - x + 3y - 3.$$

5p a) Calculați $3 \circ (-2)$.

5p b) Arătați că legea „$\circ$” nu admite element neutru.

5p c) Găsiți două numere a și b iraționale pentru care $a \circ b$ este număr întreg.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2\operatorname{arctg} x$.

5p a) Arătați că f are un singur punct de extrem local.

5p b) Comparați numerele $a = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ și $b = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

5p c) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f, paralelă cu dreapta de ecuație $x - 2y + 3 = 0$.

2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

5p a) Arătați că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p b) Arătați că $\int_0^1 \frac{x}{f(x)}\,dx = \sqrt{2} - 1$..

5p c) Notăm $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{f(x)}\,dx$, n număr natural nenul.

Demonstrați că $(n+1)I_{n+1} + nI_{n-1} = \sqrt{2}$, pentru orice n număr natural, $n \geq 2$.

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

TEST 5

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{5}{z}=\frac{5}{2-i}=2+i$	**3p**
	$z+\frac{5}{z}=4$, care este număr real.	**2p**
2.	$f(1)=4$	**2p**
	$(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(4)=14$.	**3p**
3.	$\left(\frac{1}{4}\right)^{1-x}=2^{2x-2}$	**2p**
	$x=2x-2\Rightarrow x=2$.	**3p**
4.	Cazuri posibile: 900, nu convin $\overline{abc}$ cu a, b, c impare, deci 125 numere.	**3p**
	Cazuri favorabile: 775; $p=\frac{31}{36}$.	**2p**
5.	A, B, M coliniare, $m_{AB}=m_{AM}$, $M(a,0)$	**2p**
	$2=\frac{4}{a-1}\Rightarrow a=3$.	**3p**
6.	$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}$	**2p**
	$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1}{3}$.	**3p**

SUBIECTUL II **(30 de puncte)**

1.a)	$A(a)\cdot A(b)=\begin{pmatrix}1&\ln a&0\\0&1&0\\0&0&a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&\ln b&0\\0&1&0\\0&0&b\end{pmatrix}$	**2p**
	$=\begin{pmatrix}1&\ln a+\ln b&0\\0&1&0\\0&0&ab\end{pmatrix}=A(ab)$.	**3p**
b)	Fie $A(x')$ inversa matricei $A(x)$, $x'>0$, atunci $A(x)\cdot A(x')=I_3$	**2p**
	$A(xx')=A(1)\Rightarrow x'=\frac{1}{x}$ și $A^{-1}(x)=A\left(\frac{1}{x}\right)$.	**3p**
c)	$B=\begin{pmatrix}2019&a&0\\0&2019&0\\0&0&b\end{pmatrix}$, $\det B=2019^2 b$	**3p**
	$b=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{2019\cdot 2020}=\frac{2019}{2020}$, $\det B=\frac{2019^3}{2020}$.	**2p**
2.a)	$3\circ(-2)=2\cdot 3\cdot(-2)-3+3\cdot(-2)-3$	**3p** **2p**

	$=-24$.	
b)	Dacă e este element neutru, atunci $x\circ e=e\circ x=x$, pentru orice x număr real. $2xe-x+3e-3=2ex-e+3x-3=x$, pentru orice x număr real $\Rightarrow 2e-1=2e+3$, fals.	2p 3p
c)	$a\circ b=2ab-a+3b-3=n$ număr întreg, $a=\dfrac{n-3b+3}{2b-1}$ Alegem, de exemplu, $n=-3$, $2b-1=\sqrt{2}$, rezultă $a=\dfrac{-6-3\sqrt{2}}{4}$, $b=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$.	3p 2p

SUBIECTUL III **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, $f'(x)=0$, $x>0\Rightarrow x=1$ $A\left(1,\dfrac{2-\pi}{2}\right)$ punct de minim.	2p 3p
b)	$\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\in(0,\ 1)$, $\dfrac{1}{\sqrt{3}}<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ f este strict descrescătoare pe (0, 1), $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)>f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.	2p 3p
c)	Fie $M(x_0,y_0)$ punctul de pe graficul funcției în care tangenta este paralelă cu dreapta (d): $x-2y+3=0$, panta tangentei este $f'(x_0)$, $m_d=\dfrac{1}{2}$. $f'(x_0)=\dfrac{1}{2}\Rightarrow x_0=\sqrt{3}$; $y_0=\sqrt{3}-\dfrac{2\pi}{3}$ și ecuația tangentei este $3x-6y+3\sqrt{3}-4\pi=0$.	2p 3p
2.a)	Fie F primitivă a funcției f, atunci $F'(x)=f(x)$, pentru orice x număr real. $F'(x)=\sqrt{x^2+1}>0$, pentru orice x număr real $\Rightarrow F$ strict crescătoare.	2p 3p
b)	$\displaystyle\int_0^1\frac{x}{f(x)}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$ $\sqrt{x^2+1}=t\Rightarrow\displaystyle\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x=\int_1^{\sqrt{2}}1\,\mathrm{d}t=\sqrt{2}-1$.	2p 3p
c)	$I_{n+1}=\displaystyle\int_0^1\frac{x^{n+1}}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^n\left(\sqrt{x^2+1}\right)'\mathrm{d}x=x^n\sqrt{x^2+1}\Big/_0^1-\int_0^1 nx^{n-1}\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ $\displaystyle\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x^{n-1}(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x=I_{n+1}+I_{n-1}$, $I_{n+1}=\sqrt{2}-n(I_{n+1}+I_{n-1})\Rightarrow(n+1)I_{n+1}=\sqrt{2}-nI_{n-1}$.	3p 2p

„Matematica este muzica rațiunii”

James Sylvester

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Model de antrenament **TEST 6**

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați numerele complexe z, știind că $|z|=1$ și $(z-1)(i^2+i^4+\bar{z})\in\mathbb{R}$.

5p **2.** Dacă ***I*** este mulțimea soluțiilor inecuației $x^2-3x-18\leq, x\in\mathbb{R}$, aflați suma numerelor întregi din ***I***.

5p **3.** Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, definit prin $a_{n+1}=2a_n+3$ și $a_1=1$. Calculați a_{2020}.

5p **4.** Determinați inversa funcției bijective $f:(0,+\infty)\to(-5,+\infty)$, $f(x)=3x-5$.

5p **5.** Determinați lungimea segmentului determinat de punctul $A(3,1)$ și proiecția punctului A pe dreapta de ecuație $x-y+3=0$

5p **6.** Arătați că dacă într-un triunghi ABC are loc relația $\cos^2 A+\cos^2 C=1+\cos^2 B$, atunci triunghiul este dreptunghic.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $V(x,y,z)=\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{pmatrix}$, unde x,y și z sunt numere reale oarecare.

5p **a)** Determinaţi inversa matricei $V(2,0,0)$.

5p b) Arătaţi că dacă x,y şi z sunt numere întregi oarecare, atunci $\det(V(x,y,z))$ este divizibil cu $x+y+z$.

5p **c)** Determinaţi numerele reale x, y şi z astfel încât $V(x,y,z)\cdot V(1,0,1)=V(1,1,1)$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea $x*y=\sqrt[3]{x^3+ay^3+1}$, unde a este un număr real.

5p a) Determinaţi numărul real a, ştiind că $1*1=1$.

5p b) Determinaţi a, ştiind că legea ” *” este asociativă.

5p c) Pentru a=1 rezolvați ecuația x*(x*x) = x, x ∈ ℝ..

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $.f:[1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{\sqrt{2x^2+1}}{2x+1}$

5p a) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

5p b) Arătaţi că, $f'(x)=\frac{2(x-1)}{(2x+1)^2\cdot\sqrt{2x^2+1}}$, pentru orice număr real $x\geq 1$.

5p **c)** Arătaţi că $\frac{\sqrt{3}}{3}\leq f(x)<\frac{\sqrt{2}}{2}$ pentru orice număr real $x\geq 1$.

2. Se consideră funcţia $f:[1,e]\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{\sqrt{lnx}}{x}$

5p a) Calculaţi $\int_1^e f(x)dx$..

5p b) Determinaţi primitiva $F:[1,e]\to\mathbb{R}$ a funcţiei f, cu proprietatea $F(1)=1$.

5p **c)** Determinaţi numărul real a, pentru care $\int_1^a xf^2(x)dx=\frac{1}{4}$.

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

TEST 6

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$ şi $i^2 + i^4 = -1 + 1 = 0$ $(z-1)\cdot\bar{z} = 1 - x + iy \in \mathbb{R},\ deci\ y = 0$ $z = \pm 1$	**2p** **3p**
2.	Inecuaţia $x^2 - 3x - 18 \le 0, x \in \mathbb{R}$ are mulţimea de soluţii intervalul $I = [-3, 6]$ Suma numerelor intregi din intervalul I este: $S = (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 15$	**2p** **3p**
3	Calculează $a_2 = 2\cdot 1 + 3 = 5$, $a_3 = 2^2\cdot 1 + 2\cdot 3 + 3 = 13$ Determină $a_n = 2^{n-1}\cdot 1 + 2^{n-2}\cdot 3 + 2^{n-3}\cdot 3 ... + 2\cdot 3 + 3 = 2^{n+1} - 3$ Prin urmare $a_{2020} = 2^{2021} - 3$	**1p** **3p** **1p**
4.	Fie $y = 3x - 5$ şi exprimăm pe x ca funcţie de $y : x = \frac{1}{3}y + \frac{5}{3}$ $x = f^{-1}(y)$, unde $f^{-1} : (-5, +\infty) \to (0, +\infty), f^{-1}(y) = \frac{1}{3}y + \frac{5}{3}$	**3p** **2p**
5.	Scrie ecuaţia dreptei deteminate de punctul $A(3,1)$, perpendiculară pe dreapta dată $x - y + 3 = 0$. Se obţine dreapta $x + y - 4 = 0$. Se rezolvă sistemul format de cele două ecuaţii şi se obţin coordonatele punctului M de intersecţie al dreptelor $M\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$. Distanţa căutată, este lungimea segmentului $AM = \frac{5}{2}\sqrt{2}$	**2p** **3p**
6	Relaţia dată este echivalentă cu relaţia $1 - \sin^2 A + 1 - \sin^2 C = 2 - \sin^2 B$ şi se obţine: $\sin^2 A + \sin^2 C = \sin^2 B$. Conform teoremei sinusurilor avem: $\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$. Se inlocuieşte şi se obţine: $\left(\frac{a}{2R}\right)^2 + \left(\frac{b}{2R}\right)^2 = \left(\frac{c}{2R}\right)^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$ Prin urmare, conform reciprocei teoremei lui Pitagora, este dreptunghic.	**2p** **2p** **1p**

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1.a)	Înlocuieşte valorile lui x,z şi y: $V(2,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ şi $\det V(2,0,0) = -8 \ne 0$ După efectuarea calculelor se obţine $V^{-1}(2,0,0) = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$	**2p** **3p**
b)	$\det(V(x,y,z)) = \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+y+z & y & z \\ x+y+z & z & x \\ x+y+z & x & y \end{vmatrix} = (x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & y & z \\ 1 & z & x \\ 1 & x & y \end{vmatrix}$ Deci $V(x,y,z)\|V(x,y,z)\|$, pentru orice numere reale x, y, z.	**2p** **3p**
c)	Se înlocuieşte şi se obţine: $\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x+z & y+z & x+y \\ x+y & x+z & y+z \\ y+z & x+y & x+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Soluţia sistemului este $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{2}$	**2p** **1p** **2p**

2.a)	$1*1=\sqrt[3]{1^3+a1^3+1}$ **şi** $\sqrt[3]{a+2}=1\Rightarrow a=-1$	**3p** **2p**
b)	$(x*y)*z=\sqrt[3]{x^3+ay^3+1}*z=\sqrt[3]{x^3+ay^3+az^3+2}$ $x*(y*z)=x*\sqrt[3]{y^3+az^3+1}=\sqrt[3]{x^3+ay^3+a^2z^3+a+1}$ Se obţine a=1.	**2p** **3p**
c)	$x*(x*x)=x\Leftrightarrow x*\sqrt[3]{x^3+x^3+1}=x$ $\Leftrightarrow\sqrt[3]{x^3+x^3+x^3+2}=x$ $3x^3+2=x^3\Leftrightarrow x=-1$	**2p** **2p** **1p**

SUBIECTUL III **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{2x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\lvert x\rvert\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}=$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{x\cdot\left(2+\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{2+\frac{1}{x}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	**2p** **3p**
b)	$f'(x)=\frac{\left(\sqrt{2x^2+1}\right)'\cdot(2x+1)-(2x+1)'\cdot\sqrt{2x^2+1}}{(2x+1)^2}=\frac{\frac{4x}{2\sqrt{2x^2+1}}\cdot(2x+1)-2\cdot\sqrt{2x^2+1}}{(2x+1)^2}=$ $=\frac{2\cdot(x-1)}{(2x+1)^2\cdot\sqrt{2x^2+1}}$	**2p** **3p**
c)	Deoarece $f'(x)=\frac{2\cdot(x-1)}{(2x+1)^2\cdot\sqrt{2x^2+1}}\geq 0$ pentru orice $x\geq 1$ funcţia f este crescătoare şi $\min\limits_{x\geq 1}f(x)=f(1)=\frac{\sqrt{3}}{3}$. $\frac{\sqrt{3}}{3}\leq f(x)$ pentru orice $1\leq x<+\infty$ şi $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ (conform punctului a)) . Prin urmare $\frac{\sqrt{3}}{3}\leq f(x)<\frac{\sqrt{2}}{2}$ pentru orice $1\leq x<+\infty$.	**2p** **1p** **2p**
2.a)	$\int_1^e\frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx=\int_1^e\sqrt{\ln x}\cdot(\ln x)'\,dx=\int_1^e\left(\frac{2}{3}\ln^{\frac{3}{2}}x\right)'dx=$ $=\frac{2}{3}\cdot(\ln x)^{\frac{3}{2}}\Big\|_1^e=\frac{2}{3}$	**3p** **2p**
b)	$F(x)=\frac{2}{3}\ln x\sqrt{\ln x}+C$ este o primitivă a funcţiei f . Deoarece $F(1)=1\Rightarrow C=1$. $F(x)=\frac{2}{3}\ln x\sqrt{\ln x}+1$	**2p** **3p**
c)	$\int_1^a x\left(\frac{\sqrt{\ln x}}{x}\right)^2dx=\int_1^a\frac{\ln x}{x}dx=\int_1^a\frac{1}{2}\left(\ln^2 x\right)'dx=\frac{1}{2}\left(\ln^2 x\right)\Big\|_1^a=$ $\frac{1}{2}\left(\ln^2 x\right)\Big\|_1^a=\frac{1}{2}\ln^2 a$ $\frac{1}{2}\ln^2 a=\frac{1}{4}$ Prin urmare $a=e^{\sqrt{\frac{1}{2}}}$	**2p** **2p** **1p**

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

Model de antrenament **TEST 1**

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați modulul numărului complex $z = \frac{3-i}{1+3i}$.

5p **2.** Determinați numărul natural m, astfel încât parabola asociată funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - (m+3)x + 2m + 3$ să fie tangentă axei Ox.

5p **3.** Rezolvați ecuația $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor divizibil cu 10.

5p **5.** Determinați numărul real p, astfel încât dreapta de ecuație $px + (2p-1)y + 5 = 0$ să aibă să panta -2.

5p **6.** Calculați perimetrul triunghiului ABC, știind că AB=6, BC=10 și $\measuredangle B = 120°$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Fie sistemul de ecuații $\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ x + by - 2z = -1 \\ x - y + z = 6 \end{cases}$, unde a și b sunt numere reale.

5p a) Determinați numerele reale a, b, astfel încât $(1, -3,\ 2)$ să fie soluție a sistemului.

5p b) Pentru a=2, b=1, găsiți soluția sistemului.

5p c) Pentru a=11, determinați valorile întregi ale numărului b, astfel încât soluția sistemului să fie formată din numere întregi.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție " $*$ " astfel: $x * y = 3xy - 3x - 3y + 4$.

5p a) Determinați elementul neutru al legii de compoziție " $*$ ".

5p b) Arătați că $x * y \in (1, \infty)$, pentru orice numere $x, y \in (1, \infty)$.

5p c) Găsiți două numere $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, astfel încât $a * b \in \mathbb{Z}$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x-1}{x^2+3}$.

5p a) Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției.

5p b) Determinați punctele de pe graficul funcției, în care tangenta la graficul funcției este paralelă cu Ox.

5p c) Arătați că $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{6}$, pentru orice număr real x.

2. Fie $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x} + x$.

5p a) Calculați $\int_1^e (f(x) - x) \cdot x \, dx$.

5p b) Calculați $\int_1^e f(x) \, dx$.

5p c) Arătați că șirul cu termenul general $I_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} (f(x) - x) dx,\ n \geq 1$ este o progresie aritmetică cu rația 1.

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

TEST 1

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

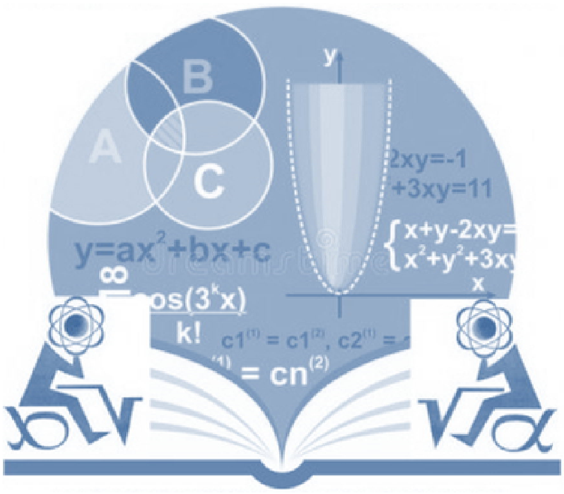
1.	$\lvert z\rvert=\frac{\lvert 3-i\rvert}{\lvert 1+3i\rvert}=\frac{\sqrt{9+1}}{\sqrt{1+9}}\Rightarrow$ $\lvert z\rvert=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}}=1$	**3p** **2p**
2.	$\Delta=(m+3)^2-4(2m+3)=m^2-2m-3=0\Rightarrow$ $m_1=3\in\mathbb{N}, m_2=-1\notin\mathbb{N}$	**3p** **2p**
3.	$\log_2 x+\frac{1}{2}\log_2 x+\frac{1}{3}\log_2 x=11\Rightarrow\frac{11}{6}\log_2 x=11\Rightarrow$ $log_2 x=6\Rightarrow x=64$, care verifică ecuația inițială	**3p** **2p**
4.	Nr. cazuri posibile = 90, nr cazuri favorabile = 17 (10,20,30, … , 90, 25, 52, 45, 54, 65, 56, 85, 58) $P=\frac{17}{90}$	**2p** **2p** **1p**
5.	$m=-\frac{a}{b}=-\frac{p}{2p-1}=-2\Rightarrow$ $p=\frac{2}{3}$	**3p** **2p**
6.	$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot cosB=36+100-2\cdot 10\cdot 6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=196\Rightarrow$ $AC=14\Rightarrow P=AB+BC+AC=30$	**3p** **2p**

SUBIECTUL II **(30 de puncte)**

1.a)	$x=1, y=-3, z=2\Rightarrow\begin{cases}1+2\cdot(-3)+3\cdot 2=a\\1+b\cdot(-3)-2\cdot 2=-1\Rightarrow\\1-(-3)+2=6\end{cases}$ $a=1, b=-\frac{2}{3}$.	**2p** **3p**
b)	$\Delta=\begin{vmatrix}1&2&3\\1&1&-2\\1&-1&1\end{vmatrix}=-13, \Delta_x=\begin{vmatrix}2&2&3\\-1&1&-2\\6&-1&1\end{vmatrix}=-39, \Delta_y=\begin{vmatrix}1&2&3\\1&-1&-2\\1&6&1\end{vmatrix}=26,$ $\Delta_z=\begin{vmatrix}1&2&2\\1&1&-1\\1&-1&6\end{vmatrix}=-13\Rightarrow$ $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=3, y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=-2, z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=1.$	**3p** **2p**
c)	$a=11\Rightarrow\Delta=\begin{vmatrix}1&2&3\\1&b&-2\\1&-1&1\end{vmatrix}=-2b-11, \Delta_y=\begin{vmatrix}1&11&3\\1&-1&-2\\1&6&1\end{vmatrix}=-1\Rightarrow y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-1}{-2b-11}\in$ $\mathbb{Z}\Rightarrow 1\,\vdots\,(2b+11)\Rightarrow b\in\{-5,-6\}\Rightarrow x,z\in\mathbb{Z}$.	**3p** **2p**
2.a)	$\exists e\in\mathbb{R},\ a.î.\ x*e=e*x=x,\forall x\in\mathbb{R}\quad\Rightarrow\ 3xe-3x-3e+4=3ex-3e-3x+4=x$ $\Rightarrow 3xe-4x-3e+4=0\Rightarrow(3e-4)(x-1)=0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow(3e-4)=0\Rightarrow e=\frac{4}{3}\in\mathbb{R}$.	**2p** **3p**
b)	$\forall x,y\in(1,\infty)\Rightarrow(x-1)>0,(y-1)>0\Rightarrow 3(x-1)(y-1)>0$ $\Rightarrow 3(x-1)(y-1)+1>1\Rightarrow x*y\in(1,\infty)$	**3p** **2p**
c)	$a*b\in\mathbb{Z}\Rightarrow 3(a-1)(b-1)+1\in\mathbb{Z}$, fie $(a-1)=\frac{2}{3},(b-1)=\frac{3}{2}\Rightarrow a*b=3\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}+$ $1=4\in\mathbb{Z}$ $\Rightarrow a=\frac{5}{3}, b=\frac{5}{2}\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$	**3p** **2p**

SUBIECTUL III **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-1}{x^2+3} = 0$ Ecuația asimptotei la $+\infty$: $y=0$. Graficul lui f nu admite asimptote oblice la $+\infty$.	**3p** **2p**
b)	$f'(x) = \frac{(x-1)'(x^2+3)-(x-1)(x^2+3)'}{(x^2+3)^2} = \frac{(x^2+3)-(x-1)\cdot 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2}$ Tangenta este paralelă cu Ox $\Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow -x^2+2x+3=0 \Rightarrow x_1=-1, x_2=3 \Rightarrow$ $f(-1)=-\frac{1}{2}, f(3)=\frac{1}{6} \Rightarrow A\left(-1,-\frac{1}{2}\right), B\left(3,\frac{1}{6}\right)$.	**2p** **2p** **1p**
c)	$x\in(-\infty,-1) \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow f$ descrescătoare, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0, f(-1)=-\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}\le f(x)<0$ $x\in[-1,3] \Rightarrow f'(x)\ge 0 \Rightarrow f$ crescătoare, $f(-1)=-\frac{1}{2}, f(3)=\frac{1}{6} \Rightarrow -\frac{1}{2}\le f(x)\le\frac{1}{6}$ $x\in(3,\infty) \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow f$descrescătoare, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, $f(3)=\frac{1}{6} \Rightarrow 0<f(x)\le\frac{1}{6}$, Așadar avem $-\frac{1}{2}\le f(x)\le\frac{1}{6}$, pentru orice număr real x	**2p** **1p** **1p** **1p**
2.a)	$\int_1^e (f(x)-x)\cdot x\,dx = \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x}+x-x\right)\cdot x\,dx = \int_1^e x'\cdot \ln x\,dx = x\cdot\ln x\Big\|_1^e - \int_1^e x\cdot(\ln x)'dx =$ $= e\cdot\ln e - 0 - \int_1^e x\cdot\frac{1}{x}\,dx = e - x\Big\|_1^e = e-(e-1)=1$	**3p** **2p**
b)	$\int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e\left(\frac{\ln x}{x}+x\right)dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x}dx + \int_1^e x dx = \int_1^e (\ln x)'\cdot\ln x dx + \frac{x^2}{2}\Big\|_1^e =$ $\frac{(\ln x)^2}{2}\Big\|_1^e + \frac{e^2}{2}-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}-\frac{0}{2}+\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}=\frac{e^2}{2}$	**3p** **2p**
c)	$I_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{\ln x}{x}dx = \int_{e^n}^{e^{n+1}} (\ln x)'\ln x dx = \frac{(\ln x)^2}{2}\Big\|_{e^n}^{e^{n+1}} = \frac{(\ln e^{n+1})^2}{2} - \frac{(\ln e^n)^2}{2} = \frac{2n+1}{2}$ $I_{n+1}-I_n = \frac{2n+3}{2}-\frac{2n+1}{2} = 1 = const = r \Rightarrow I_n$ este progresie aritmetică cu rația 1.	**3p** **2p**



„Matematica este o formă de poezie care transcende poezia prin aceea că proclamă adevărul; o formă de raţionament care transcende raţionamentul prin aceea că vrea să înfăptuiască adevărul pe care îl proclamă; o formă de acţiune, un comportament ritual, care nu găseşte împlinire în faptă, ci trebuie să proclame şi să elaboreze o formă poetică a adevărului.”

Salomon Bochner

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

Model de antrenament **TEST 2**

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1**. Ordonați crescător numerele: $(-1)^{2021}$, $\log_{\frac{1}{3}} 27$ și $\sqrt[3]{-8}$.

5p **2**. Fie x_1 și x_2 rădăcinile ecuației $x^2-2x-m=0$. Aflați $m\in\mathbb{R}$ pentru care $(x_1-1)^2+(x_2-1)^2=4$

5p **3**. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x+9^x=2$

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând o submulțime cu 3 elemente a mulțimii $A=\{1,2,3,4,5\}$ aceasta să conțină cel puțin un număr par.

5p **5**. În reperul cartezian $(O,\vec{i},\vec{j})$ se consideră punctele $A(-1,-1)$ și $B(1,2)$. Determinați coordonatele unui punct E cu proprietatea că $\overrightarrow{AE}=-2\cdot\overrightarrow{EB}$.

5p **6**. Fie $a,\ b\in\mathbb{R}$ astfel încât $a+b=\frac{3\pi}{2}$. Arătați că $\sin 2a-\sin 2b=0$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $m(a)=\begin{pmatrix}1+3a & 3a\\ -2a & 1-2a\end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$.

5p a) Calculați $\det(M(a))$.

5p b) Arătați că $M(a)\cdot M(b)=M(ab+a+b)$, pentru orice numere reale *a* și *b*.

5p c) Arătați că $(M(2))^n=M(3^n-1)$, pentru orice număr natural nenul *n*.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=xy-2x-2y+6$.

5p a) Arătați că $x*y=(x-2)(y-2)+2$, pentru orice $x,\ y\in\mathbb{R}$.

5p b) Aflați perechile de numere întregi (m,n) pentru care $m*n=4$.

5p c) Calculați $2^{2020}*2^{2019}*\ldots*2^2*2^1*2^0$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2+2x}{x-1}$.

5p a) Calculați $f'(x), x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

5p b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p c) Determinați coordonatele punctelor graficului în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu dreapta $d:2x+y+3=0$

2. Fie funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x+\frac{1}{x}$

5p a) Calculați $\int_1^2 f^2(x)dx$.

5p b) Determinați primitiva F a funcției f cu proprietatea că $F(1)=\frac{3}{2}$.

5p c) Calculați $\int_1^e f(x)\cdot\ln x\,dx$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

TEST 2

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I **30 de puncte)**

1.	$(-1)^{2021}=-1;\ \log_{\frac{1}{3}}27=-3;\ \sqrt[3]{-8}=-2$	**3p**
	$\log_{\frac{1}{3}}27<\sqrt[3]{-8}<(-1)^{2021}$	**2p**
2.	$x_1+x_2=2, x_1\cdot x_2=-m$	**2p**
	$(x_1-1)^2+(x_2-1)^2=4 \Leftrightarrow x_1^2+x_2^2-2(x_1+x_2)+2=4$ $\Leftrightarrow x_1\cdot x_2=-1 \Leftrightarrow m=1$	**3p**
3.	Notăm $3^x=t$ și ecuația devine $t^2+t-2=0$ cu soluțiile $t_1=1$ și $t_2=-2$	**3p**
	Convine doar $t_1=1$ deci $x=0$ soluție	**2p**
4.	Numărul submulțimilor de trei elemente care conțin exact un număr par este egal cu 6 iar al celor care conțin exact două numere pare este egal cu 3, deci numărul cazurilor favorabile este 9	**2p**
	Numărul cazurilor posibile este egal cu $C_5^3=10$	**2p**
	$P=\dfrac{9}{10}$	**1p**
5.	Fie $E(x,y)$ și din relația $\overrightarrow{AE}=-2\cdot\overrightarrow{EB}\Rightarrow(x+1)\vec{i}+(y+1)\vec{j}=2(x-1)\vec{i}+2(y-2)\vec{j}$	**3p**
	$x=3, y=5\Rightarrow\ E(3,5)$	**2p**
6	$\sin 2a-\sin 2b=2\sin(a-b)\cdot\cos(a+b)$	**2p**
	$\cos(a+b)=\cos\dfrac{3\pi}{2}=0\Rightarrow\sin 2a-\sin 2b=0$	**3p**

SUBIECTUL II **(30 de puncte)**

1.a)	$\det M(a)=(1+3a)\cdot(1-2a)+6a^2$	**3p**
	$\det M(a)=a+1$	**2p**
b)	Calculează $M(a)\cdot M(b)$	**3p**
	Obține $M(a)\cdot M(b)=M(a+b+ab)$	**2p**
c)	$(M(2))^2=M(2)\cdot M(2)=M(3^2-1)$	**2p**
	Prin inducție matematică, se demonstrează $(M(2))^n=M(3^n-1)$, pentru orice număr natural nenul *n*.	**3p**
2.a)	$x*y=xy-2x-2y+6=x(y-2)-2(y-2)+2$	**3p**
	$x*y=(x-2)(y-2)+2$	**2p**
b)	$m*n=4\Leftrightarrow(m-2)(n-2)=2$	**2p**
	$(m,n)\in\{(4,3);(3,4);(0,1);(1,0)\}$	**3p**
c)	$x*2=2*x=2,$ pentru orice număr real *x*.	**2p**

	Notăm $2^{2020}*2^{2019}*\ldots*2^2=x$ iar $2^{2020}*2^{2019}*\ldots*2^2*2^1*2^0=(x*2)*2^0=2*1=2$	3p

SUBIECTUL III **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{\left(x^2+2x\right)'\cdot(x-1)-\left(x^2+2x\right)\cdot(x-1)'}{(x-1)^2}$	**2p**
	$f'(x)=\dfrac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}$	**3p**
b)	$m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x}{x^2-x}=1$	**2p**
	$n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x}{x-1}=3$	**2p**
	Ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ este $y=x+3$	**1p**
c)	Ecuația tangentei în $M\left(x_0,f(x_0)\right)$ este $y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot\left(x-x_0\right)$ iar $f'(x_0)=m_d=-2$	**2p**
	$f'(x_0)=-2\Leftrightarrow\dfrac{x_0^2-2x_0-2}{x_0^2-2x_0+1}=-2\Leftrightarrow x_0\in\{0,2\}$	**2p**
	Punctele în care tangenta e paralelă cu dreapta d sunt $O(0,0)$ și $M(2,8)$	**1p**
2.a)	$\int_1^2 f^2(x)\,dx=\int_1^2\left(x^2+2+\dfrac{1}{x^2}\right)dx=\int_1^2 x^2dx+\int_1^2 2dx+\int_1^2 x^{-2}dx$	**2p**
	$=\dfrac{7}{3}+2-\left(2^{-1}-1^{-1}\right)=\dfrac{29}{6}$	**3p**
b)	Fie F o primitivă a funției f, $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+\ln x+k$, $k\in\mathbb{R}$.	**3p**
	$F(1)=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}+k=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow k=1$ deci $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+\ln x+1$	**2p**
c)	$\int_1^e x\cdot\ln x\,dx=\dfrac{e^2}{2}\cdot\ln e-\dfrac{1}{2}\cdot\ln 1-\int_1^e\dfrac{x^2}{2}\cdot\dfrac{1}{x}dx=\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{e^2}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{e^2+1}{4}$	**2p**
	$\int_1^e\dfrac{1}{x}\cdot\ln x\,dx=\int_1^e\ln x\cdot(\ln x)'dx=\dfrac{1}{2}$	**2p**
	$\int_1^e f(x)\cdot\ln x\,dx=\int_1^e x\cdot\ln x\,dx+\int_1^e\dfrac{1}{x}\cdot\ln x\,dx=\dfrac{e^2+3}{4}$	**1p**

„**Universul** *nu poate fi citit până nu îi învăţăm limbajul şi ne acomodăm cu literele în care este scris*. **Este scris în limbaj matematic, iar literele sunt triunghiuri, cercuri şi alte figuri geometrice,** *mijloace fără de care îi este imposibil omului să înţeleagă un singur cuvânt.* **Fără acestea, omul pribegeşte într-un labirint întunecat.”**

Galileo Galilei

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

Model de antrenament TEST 3

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați numărul complex z dacă $z+2\bar{z}=3-2i$.

5p **2.** Rezolvați în **R** ecuația $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\sqrt{27}$.

5p **3.** Câte elemente are o mulțime A dacă numărul submulțimilor sale este 128?

5p **4.** 4. Arătați că graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+mx-3$ intersectează axa Ox în două puncte distincte, oricare ar fi $m\in\mathbb{R}$.

5p **5.** Scrieți ecuația dreptei care trece prin punctul $A(1,-2)$ și este perpendiculară pe dreapta de ecuație $2x-y=0$.

5p **6.** Dacă $a\in\mathbb{R}$. și $\sin a+\cos a=\sqrt{2}$, arătați că $\sin 2a=1$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Fie matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, unde $a\in\mathbb{R}$ și matricea $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p a) Calculați determinantul matricei $A(0)$.

5p b) Determinați valorile lui a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.

5p c) Pentru $a=1$, rezolvați ecuația matriceală $2A-X=I_3$.

2. Pe mulțimea $G=(5,\infty)$ se consideră legea de compoziție $x*y=xy-5x-5y+30$.

5p a) Demonstrați că $x*y=(x-5)(y-5)+5$, pentru orice $x,y\in G$.

5p b) Determinați elementul neutru al legii "$*$".

5p c) Rezolvați în mulțimea G ecuația $x*x=9$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2+x}{x-1}$.

5p a) Calculați $f'(x),\ x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

5p b) Determinați ecuația asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcției *f*.

5p c) Găsiți punctele de extrem ale funcției *f*.

2. Se consideră funcția. $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x-1}{x+1}$.

5p a) Calculați $\int_1^2 (x+1)f(x)\,dx$.

5p b) Demonstrați că orice primitivă a funcției *f* este strict crescătoare.

5p c) Determinați constantele a, b $\in\mathbb{R}$ știind că funcția $F:[1,\infty)\to\mathbb{R}, F(x)=ax+b\ln(x+1)$ este o primitivă a funcției f.

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

TEST 3

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	Pentru $z=a+bi$ cu $a,b\in\mathbb{R}\Rightarrow\bar{z}=a-bi\Rightarrow 3a-bi=3-2i$ $a=1$ și $b=2$	**3p** **2p**
2.	$3^{-x}=3^{\frac{3}{2}}$ Soluția ecuației este $x=-\dfrac{3}{2}$	**3p** **2p**
3.	Numărul submulțimilor unei mulțimi cu n elemente este egal cu 2^n. Se obține ecuația $2^n=128$. $2^n=2^7\Leftrightarrow n=7$. Mulțimea A are 7 elemente.	**3p** **2p**
4.	Ecuația atașată $x^2+mx-3=0$ are $\Delta=m^2+12$. $\Delta>0,\forall m\in\mathbb{R}\Rightarrow$ ecuația atașată are două soluții reale distincte. Graficul funcției *f* intersectează axa *Ox* în două puncte distincte.	**2p** **2p** **1p**
5.	Panta dreptei este $m=-\dfrac{1}{m_d}=-\dfrac{1}{2}$ Ecuația dreptei este $y-y_A=m\left(x-x_A\right)\Rightarrow x+2y+3=0$.	**3p** **2p**
6.	Prin ridicarea la puterea a doua a relației $\sin a+\cos a=\sqrt{2}\Rightarrow\sin^2 a+2\sin a\cos a+\cos^2 a=2$ Se obține $1+\sin 2a=2$ Concluzia $\sin 2a=1$	**2p** **2p** **1p**

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1.a)	Determină matricea $A(0)=\begin{pmatrix}0&3&1\\2&-1&-1\\3&1&2\end{pmatrix}$ $\det A(0)=0-9+2+3-12=-16$	**2p** **3p**
b)	Calculează $\det A(a)=-a-16$ $A(a)$ este inversabilă $\Leftrightarrow\det A(a)\neq 0$ $-a-16\neq\Leftrightarrow a-16\Leftrightarrow a\in\mathbb{R}\backslash\{-16\}$	**1p** **2p** **2p**
c)	$2A-X=I_3\Leftrightarrow -X=I_3-2A\Leftrightarrow X=2A-I_3$ $X=\begin{pmatrix}2&6&2\\4&-2&-2\\6&2&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&6&2\\4&-3&-2\\6&2&3\end{pmatrix}$	**3p** **2p**
2.a)	$x*y=xy-5x-5y+30=x(y-5)-5(y-5)+5$ $x*y=(x-5)(y-5)+5,\forall x,y\in G$	**3p** **2p**
b)	$\exists e\in G$ astfel încât $x*e=e*x=x,\forall x\in G$ $x*e=e*x$ $xe-5x-5e+30=x\Leftrightarrow x(e-5)-5e+30=x,\forall x\in G$ $e-5=1$ și $-5e+30=0\Rightarrow e=6\in G$	**1p** **1p** **1p** **2p**
c)	$x*x=9\Leftrightarrow(x-5)^2+5=9$ $(x-5)^2-4=0\Leftrightarrow(x-3)(x-7)=0$	**2p** **1p**

	Se obțin soluțiile $x_1=3\notin G$ și $x_2=7\in G$ Soluția ecuației este $x=7$	**1p** **1p**

SUBIECTUL III **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(2x+1)(x-1)-(x^2+x)}{(x-1)^2}$ $f'(x)=\dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}, x\in R\backslash\{1\}$	**3p** **2p**
b)	$m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^2-x}=1$ $n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+x}{x-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x-1}=2$ Ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ este $y=mx+n\Rightarrow y=x+2$	**2p** **2p** **1p**
c)	Ecuația $f'(x)=0, x\in\mathbb{R}\backslash\{1\}\Leftrightarrow x^2-2x-1=0$ are soluțiile $x_1=1-\sqrt{2}$ și $x_2=1+\sqrt{2}$ Funcția f este strict crescătoare pe $\left(-\infty,1-\sqrt{2}\right]\cup\left[1+\sqrt{2},+\infty\right)$ și strict descrescătoare pe $\left[1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}\right]\backslash\{1\}$ $x_1=1-\sqrt{2}$ este punct de maxim al funcției, $x_2=1+\sqrt{2}$ este punct de minim al funcției	**2p** **2p** **1p**
2.a)	$\displaystyle\int_1^2(x+1)f(x)dx=\int_1^2(x-1)dx$ $=\left.\left(\dfrac{x^2}{2}-x\right)\right\|_1^2=\dfrac{1}{2}$	**2p** **3p**
b)	Dacă F este o primitivă a funcței $f\Rightarrow F'(x)=f(x),\forall x\in[1,\infty)\Rightarrow F'(x)=\dfrac{x-1}{x+1},x\in[1,\infty)$ $\dfrac{x-1}{x+1}\geq 0,\forall x\in[1,\infty)$ $F'(x)\geq 0,\forall x\in[1,\infty)\Rightarrow F$ este strict crescătoare	**2p** **2p** **1p**
c)	Cum F este o primitivă a funcței $f\Rightarrow F'(x)=f(x),\forall x\in[1,\infty)$ $\Rightarrow a+\dfrac{b}{x+1}=\dfrac{x-1}{x+1}\Leftrightarrow\dfrac{ax+a+b}{x+1}=\dfrac{x-1}{x+1}\Leftrightarrow ax+a+b=x-1,\forall x\in[1,\infty)$ Se obține $a=1$ și $a+b=-1\Rightarrow b=-2$	**1p** **2p** **2p**

„**Matematica este ca urcuşul la munte**. *Efortul este răsplătit de privelişti măreţe. Ca şi pe munte,ascensiunile în matematică sunt frumoase dacă nu eşti obsedat doar de locul unde vrei să ajungi şi dacăeşti în stare să savurezi tot ceea ce întâlneşti pe parcurs.“*

Solomon Marcus – „Şocul matematicii“

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

Model de antrenament **TEST 4**

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Aflați partea întreagă a numărului $m = \frac{3}{\sqrt{7}-2}$.

5p **2.** Determinați numărul de elemente ale mulțimii $\mathbf{A} = \left\{x \,/\, \mathbf{x} \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{x} - \mathbf{5} \le \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{8}}\right\}$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $81^{x-3} = 243^{2x-5}$.

5p **4.** Fie numărul complex $z = \sqrt{3} + \sqrt{3}\,i$. Calculați z^{2020}.

5p **5.** Considerăm punctele $A(p,2), B(3,4), C(4,-6)$, unde p este un număr real. Determinați p dacă $5\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{BC}$.

5p **6.** Dacă $\mathrm{tg}x = \frac{1}{5}$ calculați $\cos 2x$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. În reperul cartezian XOY se consideră puntele $A_k(0,k), B_k(2,3k), C_k(4,5k), k \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Scrieți ecuația dreptei A_2B_1.

5p b) Determinați distanța de la A_k la dreapta B_3C_1.

5p c) Determinați valorile lui k pentru care aria triunghiului $A_kB_3C_2$ este 2012.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție asociativă " $*$ "prin $x * y = 2xy - x - y + 1$.

5p a) Calculați $2020 * \frac{1}{2}$.

5p b) Arătați că $x * y = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

5p c) Rezolvați ecuația $x * x * x = x * x$, pentru $x \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \ln(2 + x^2)$.

5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{2x}{2+x^2}, x \in \mathbb{R}$.

5p b) Calculați $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-\ln 3}{x-1}$.

5p c) Arătați că f este concavă pentru $x \in (\sqrt{2}, \infty)$.

2. Fie $f_n: [1,\infty) \to \mathbb{R}, f_n(x) = x^n \ln x,\ n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Calculați $\int_1^2 \frac{f_n(x)}{\ln x} dx$.

5p b) Arătați că $\int_1^e f_2(x)\,dx = \frac{2e^3+1}{9}$.

5p c) Aflați $a > 1$ dacă $\int_1^a f_n(x)\,dx = \frac{1}{(n+1)^2}$.

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

TEST 4

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$m=\frac{3}{\sqrt{7}-2}=\frac{3(\sqrt{7}+2)}{7-4}=\sqrt{7}+2$ Cum $2<\sqrt{7}<3$, rezultă că $4<m<5$ deci $[m]=4$.	**3p** **2p**
2.	Din $x-5\le\frac{x}{8}$ avem $8x-40\le x$ deci$7x\le 40$. $x\in\{1,2,3,4,5\}$ deci numărul elementelor mulțimii A este 5.	**3p** **2p**
3.	$81^{x-3}=243^{2x-5}$, rezultă $(3^4)^{x-3}=(3^5)^{2x-5}$, obținem $3^{4x-12}=3^{10x-25}$ deci $4x-12=10x-25$. $6x=13$ deci $x=\frac{13}{6}$.	**3p** **2p**
4.	$z^{2020}=[\sqrt{3}(1+i)]^{2020}=3^{1010}[(1+i)^2]^{1010}=3^{1010}(1+2i+i^2)^{1010}=3^{1010}(2i)^{1010}$ $=6^{1010}(i^2)^{505}=6^{1010}(-1)^{505}=-6^{1010}$	**3p** **2p**
5.	$\overrightarrow{AC}=(4-p)\vec{\imath}+(-6-2)\vec{\jmath}=(4-p)\vec{\imath}+(-8)\vec{\jmath}$, $\overrightarrow{BC}=(4-3)\vec{\imath}+(-6-4)\vec{\jmath}=\vec{\imath}-10\vec{\jmath}$ Din $5\overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{BC}$ obținem $(20-5p)\vec{\imath}-40\vec{\jmath}=\vec{4\imath}-40\vec{\jmath}$ deci $20-5p=4$ și avem $p=\frac{16}{5}$.	**2p** **3p**
6.	$\cos 2x=\frac{1-tg^2x}{1+tg^2x}$ Deci $\cos 2x=\frac{1-\frac{1}{25}}{1+\frac{1}{25}}=\frac{24}{26}=\frac{12}{13}$, $\cos 2x=\frac{12}{13}$.	**2p** **3p**

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1.a)	Avem $A_2(0,2),B_1(2,3)$. A_2B_1: $\begin{vmatrix}x&y&1\\0&2&1\\2&3&1\end{vmatrix}=0$. Dezvoltăm, avem $-x+2y-4=0$, deci ecuația dreptei A_2B_1 este $-x+2y-4=0$	**2p** **3p**
b)	$A_k(0,k),B_3(2,9),C_1(4,5)$. Ecuația dreptei B_3C_1 este $\begin{vmatrix}x&y&1\\2&9&1\\4&5&1\end{vmatrix}=0$. Se obține $2x+y-13=0$. Distanța căutată este $d=\frac{\|2\cdot0+k-13\|}{\sqrt{2^2+1}}=\frac{\|k-13\|}{\sqrt{5}}$	**2p** **3p**
c)	$A_k(0,k),B_3(2,9),C_2(4,10)$. Calculăm aria triunghiului $A_kB_3C_2$, avem $S=\frac{1}{2}\|\Delta\|$, unde $\Delta=\begin{vmatrix}x&y&1\\2&9&1\\4&5&1\end{vmatrix}$ $\Delta=2k-16$ deci $S=\|k-8\|$. Din ipoteză $\|k-8\|=2012$, rezultă $k-8=2012$ deci $k=2020\in\mathbb{N}$ sau $k-8=-2012$ deci $k=-2004\notin\mathbb{N}$.	**2p** **3p**
2.a)	$2020*\frac{1}{2}=2\cdot2020\cdot\frac{1}{2}-2020-\frac{1}{2}+1=$ $2020-2020+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$	**3p** **2p**
b)	Avem succesiv $2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=2\left(xy-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}$ $=2xy-y-x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=2xy-x-y+1=x*y$. Deci $x*y=2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$	**2p** **3p**
c)	$x*x=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$; $x*x*x=2^2\left(x-\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{2}$ Obținem $2^2\left(x-\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{2}=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2\left(x-\frac{1}{2}\right)^3-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=0$	**2p**

	deci avem $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2(x-2)=0$, rezultă $x=\frac{1}{2}$ sau $x=1$.	3p

SUBIECTUL III **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{1}{2+x^2}\cdot(2+x^2)'=\frac{2x}{2+x^2}$ Rezultă $f'(x)=\frac{2x}{2+x^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.	**3p** **2p**
b)	$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=$ $=f'(1)=\ln 3$	**2p** **3p**
c)	$f''(x)=\left(\frac{2x}{2+x^2}\right)'=\frac{2(2+x^2)-2x\cdot 2x}{(2+x^2)^2}=\frac{4+2x^2-4x^2}{(2+x^2)^2}=\frac{4-2x^2}{(2+x^2)^2}$, deci $f''(x)=\frac{2(2-x^2)}{(2+x^2)^2}$,$\forall x\in\mathbb{R}$ Din $f''(x)=0$ obținem $2-x^2=0 \Leftrightarrow x_1=-\sqrt{2}$ sau $x_2=\sqrt{2}$. Pentru $x\in(\sqrt{2},\infty)$ avem $f''(x)<0$ deci f este concavă pentru $x\in(\sqrt{2},\infty)$.	**3p** **2p**
2.a)	$\int_1^2\frac{f_n(x)}{lnx}dx=\int_1^2\frac{x^n lnx}{lnx}dx=\int_1^2 x^n dx=$ $=\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big\|_1^2=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$	**3p** **2p**
b)	$\int_1^e f_2(x)=\int_1^e x^2 lnx\,dx=\int_1^e\left(\frac{x^3}{3}\right)' lnx\,dx=\frac{x^3}{3}lnx\Big\|_1^e-\int_1^e\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx=$ $=\frac{e^3}{3}-\frac{1}{3}\int_1^e x^2\,dx=\frac{e^3}{3}-\frac{1}{9}x^3\Big\|_1^e=\frac{e^3}{3}-\frac{e^3}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2e^3+1}{9}$	**3p** **2p**
c)	$\int_1^a f_n(x)dx=\int_1^a x^n lnxdx=\int_1^a\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' lnxdx=\frac{x^{n+1}}{n+1}lnx\Big\|_1^a-\int_1^a\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{x}dx=\cdots=$ $\frac{a^{n+1}(lna^{n+1}-1)+1}{(n+1)^2}$ Obținem $\frac{a^{n+1}(lna^{n+1}-1)+1}{(n+1)^2}=\frac{1}{(n+1)^2}$, deci $a^{n+1}(lna^{n+1}-1)=0$, rezultă , ținând cont că $a>1$, că $lna^{n+1}-1=0$, deci $a^{n+1}=e$ de unde $a=\sqrt[n+1]{e}$.	**3p** **2p**

Al Horezmi (*Muhammed ibn Mu sa al-Horezmi, Abu 'Abdallah Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi*) (780 d.Hr., **Bagdad, Irak** - 850 d.Hr.) este un **astronom şi matematician musulman**. A locuit în Bagdad, în timpul primei **epoci de aur** a **ştiinţei islamice** şi, la fel ca **Euclid**, a scris cărţi de matematică în care a adunat şi adaptat descoperirile mai vechi ale matematicienilor.

Cartea sa, **„Compendiu asupra calculelor prin scăderi şi egalităţi”** (*Kitab al-djabr wa al-muqaba-lah*) este o compilaţie de reguli de rezolvare a ecuaţiilor de gradul unu şi doi şi de probleme de geometrie şi proporţii. Traducerea acesteia în latină, în secolul XII, a creat legătura dintre marii matematicieni hinduşi şi arabi şi cărturarii europeni.

O derivare a titlului cărţii sale a dus la cuvântul algebră, iar o **derivare a numelui autorului** a dus la termenul de **algoritm.**

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

Model de antrenament **TEST 5**

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Aflați suma numerelor naturale de două cifre care se divid cu 7.

5p **2.** Determinați valorile reale ale lui m pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\left(2+\log_{\frac{1}{3}} m\right)\cdot x+1$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x+\sqrt{x-1}=3$.

5p **4.** Determinați probabilitatea ca alegând o funcție $f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3,4\}$, aceasta să nu fie injectivă.

5p **5.** Dacă $M(2,-3)$ și $N(-1,0)$ sunt capetele unei diagonale a pătratului $MPNQ$, să se determine aria pătratului.

5p **6.** Dacă $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, astfel încât $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$, să se verifice că $\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}<\frac{1}{4}$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Se consideră matricele A= $\begin{pmatrix}4 & 3\\ -2 & -1\end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p a) Găsiți numerele reale x și y pentru care $A^2=x\cdot A+y\cdot I_2$.

5p b) Determinați inversa matricei A.

5p c) Demonstrați că $A^n-B^n=(2^n-1)\cdot(A-B)$, oricare ar fi numărul natural nenul n.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definesc legile de compoziție asociative : $x\circ y=x+y-1$ și $x*y=xy-x-y+2$.

5p a) Determinați elementul neutru al legii de compoziție " $*$ ".

5p b) Determinați $n\in\mathbb{Z}$ astfel încât $(2^{1-n}+1)*(3^n+1)=5{,}5$.

5p c) Rezolvați în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul $\begin{cases}(x-1)\circ y=2\\ (y-x)*(y+x)=4\end{cases}$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(-\infty,-1)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^2+x+4}{x+1}$.

5p a) Determinați ecuația asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcției.

5p b) Arătați că $f'(x)=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$, oricare ar fi x$\in(-\infty,-1)$.

5p c) Demonstrați că funcția *f(x)* este concavă pe $(-\infty,-1)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\cdot e^{-x}$.

5p a) Demonstrați că $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{e-2}{e}$.

5p b) Calculați $\int_1^e f(\ln x)\,dx$.

5p c) Folosind, eventual, relația $e^x\geq x+1, (\forall)x\in\mathbb{R}$, să se demonstreze că $\int_n^{n+1} f(x)\leq \ln\frac{e(n+1)}{n+2}$, oricare ar fi numărul natural nenul n.

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

TEST 5

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	S=14+21+…+98 ⇒ $S=728$.	**3p** **2p**
2.	$2+\log_{\frac{1}{3}} m>0 \Rightarrow$ $m\in(0,9)$.	**2p** **3p**
3.	$\sqrt{x-1}=3-\mathrm{x} \Rightarrow x^2-7x+10=0$, Soluțiile sunt 2 și 5. Convine numai x=2.	**2p** **1p** **2p**
4.	Nr. cazuri posibile = 64, nr cazuri favorabile = 64-24=40 $P=\frac{40}{64}$	**2p** **2p** **1p**
5.	$MN=3\sqrt{2}\Rightarrow$ $A_{MNPQ}=9$.	**3p** **2p**
6.	$\frac{cos\alpha-sin\alpha}{cos\alpha+sin\alpha}=\frac{1-tg\alpha}{1+tg\alpha}$, $3\text{-}2\sqrt{2}<\frac{1}{4}$.	**3p** **2p**

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1.a)	$A^2=\begin{pmatrix}10 & 9\\ -6 & -5\end{pmatrix}$, $x\cdot A+y\cdot I_2=\begin{pmatrix}4x+y & 3x\\ -2x & -x+y\end{pmatrix}$, $x=3, y=-2$.	**3p** **2p**
b)	$\det(A)=2\Rightarrow A^{-1}=\frac{A^*}{2}$, $A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$.	**3p** **2p**
c)	Utilizăm metoda inducției matematice: Verificare $P(1)$-adevărată Demonstrare $P(k)\Rightarrow \mathrm{P(k+1)}$.	**2p** **3p**
2.a)	$\exists e\in\mathbb{R},\ a.\hat{\imath}.\ x*e=e*x=x, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow xe-x-e+2=ex-e-x+2=x\Rightarrow$ $\Rightarrow xe-2x-e+2=0\Rightarrow(e-2)(x-1)=0, \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow(e-2)=0\Rightarrow e=2\in\mathbb{R}$.	**2p** **3p**
b)	Obține $2^{1-n}\cdot 3^n=4{,}5$ $\Rightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^n=\frac{9}{4}\Rightarrow n=2$.	**2p** **3p**
c)	$(x-1)\circ y=2\Rightarrow x+y=4$, $(y-x)*(y+x)=4\Rightarrow y-x=2$, $\Rightarrow x=1, y=3$.	**2p** **2p** **1p**

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1.a)	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, deci nu există asimptotă orizontală $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1$, $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)=0\Rightarrow$ y=x este asimptotă oblică spre $-\infty$.	**2p** **3p**

b)	$f'(x) = \frac{(x^2+x+4)'(x+1)-(x^2+x+4)(x+1)'}{(x+1)^2}$ $f'(x) = \frac{(x^2+2x-3)}{(x+1)^2}$.	**3p** **2p**
c)	$f''(x) = \frac{8}{(x+1)^3}$, f este funcție concavă, oricare ar fi x $\in (-\infty,-1)$.	**3p** **1p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)\,dx = -e^{-x}(x+1)\Big\vert_0^1$ $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{e-2}{e}$	**3p** **2p**
b)	$\int_1^e f(\ln x)\,dx = \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x}\right)dx$ $\int_1^e f(\ln x)\,dx = \frac{1}{2}$	**2p** **3p**
c)	$xe^{-x} \le \frac{x}{x+1}$, $\Rightarrow \int_n^{n+1} f(x)\,dx \le \int_n^{n+1} \frac{x}{x+1}dx = 1-\ln(x+1)\Big\vert_n^{n+1} = \ln\frac{e(n+1)}{n+2}$.	**2p** **3p**

„Matematica este o formă de poezie care transcende poezia prin aceea că proclamă adevărul; *o formă de raţionament care transcende raţionamentul prin aceea că vrea să înfăptuiască adevărul pe care îl proclamă; o formă de acţiune, un comportament ritual, care nu găseşte împlinire în faptă, ci trebuie să proclame şi să elaboreze o formă poetică a adevărului.*”

Salomon Bochner – „Rolul matematicii în dezvoltarea ştiinţei”

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

Model de antrenament **TEST 6**

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că șirul$(a_n)_{n\ge1}$, de termen general $a_n = n^2 - 2n$ este strict monoton.

5p **2.** Determinați $x \in \mathbb{R}$ știind că $x-1,\ (x-2)^2,\ 9-x$ sunt temeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **3.** Rezolvați ecuația $\lg^2(x^2) + \lg(x^2) - 2 = 0$, pentru $x \in \mathbb{R}^*$.

5p **4.** Determinați termenul care nu îl conține pe x din dezvoltarea $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{10}$, $x \in (0,\infty)$.

5p **5.** Determinați a $\in \mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{u} = 3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath}$ $și$ $\vec{v} = a\vec{\imath} + 9\vec{\jmath}$ sunt perpendiculari.

5p **6.** Determinați $x \in (0, 2\pi)$ pentru care $sin^2x - cosx = 1$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Fie sistemul $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + z = a^2 \end{cases}$ și matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, unde $a \in \mathbb{R}$.

5p a) Arătați că suma elementelor matricei $A(2)\cdot A(-2)$ este pătrat perfect.

5p b) Demonstrați că $A(a)\cdot A(b) = A(b)\cdot A(a)$ dacă și numai dacă $a = b$.

5p c) Pentru $a \neq 1$ rezolvați sistemul.

2. Pe mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție asociativă " $\circ$ " prin $x \circ y = 2xy - 10x - 10y + 55$.

5p a) Determinați $a \in \mathbb{R}$ dacă $2 \circ a = -7$.

5p b) Arătați că $x \circ y = 2(x-5)(y-5) + 5$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

5p c) Calculați $1 \circ 2 \circ 3 \circ \ldots \circ 2020$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x-1)e^{-x} + x$.

5p a) Arătați că $f'(x) = (2-x)e^{-x} + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

5p b) Calculați $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)+f'(x)}{x}$.

5p c) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției perpendiculară pe dreapta $x + 3y = 0$.

2. Fie $f_n: [0,1] \to \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \frac{1}{x^n+9}$.

5p a) Calculați $\int_0^1 f_1(x)dx$.

5p b) Determinați $a \in (0,1)$ dacă $\int_0^a x\, f_2(x)\, dx = \frac{1}{2}\ln\frac{37}{4} - \ln 3$.

5p c) Arătați că $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$, avem $0{,}1 \le \int_0^1 f_n(x)\, dx \le 0,(1)$. .

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

TEST 6

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_{n+1}=(n+1)^2-2(n+1)=n^2+2n+1-2n-2=n^2-1$ $a_{n+1}-a_n=2n-1>0,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$, deci șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător.	**2p** **3p**
2.	Avem $2(x-2)^2=(x-1)+(9-x)\Leftrightarrow 2(x-2)^2=8\Leftrightarrow$ $(x-2)^2=4\Leftrightarrow x-2=-2\ sau\ x-2=2$, rezultă $x=0\ sau\ x=4$. Obținem termenii -1, 4, 9 sau 3,4,5.	**2p** **3p**
3.	$lgx^2=t\Rightarrow t^2+t-2=0$ cu soluțiile -2, 1 Obținem $lgx^2=-2$ sau $lgx^2=1$. Rezultă $x^2=10^{-2}$ sau $x^2=10$ deci $x\in\left\{-\frac{1}{10},-\sqrt{10},\frac{1}{10},\sqrt{10}\right\}$	**2p** **3p**
4	Avem $T_{k+1}=(-1)^kC_{10}^k(\sqrt{x})^{10-k}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^k=(-1)^kC_{10}^kx^{\frac{30-5k}{6}}$ Se impune $30-5k=0\Leftrightarrow k=6\Rightarrow T_7=C_{10}^6=210$.	**3p** **2p**
5.	$\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ $3a-36=0\Leftrightarrow a=12$.	**2p** **3p**
6.	$1-cos^2x-cosx=1\Leftrightarrow cos^2+cosx=0$ $cosx(cosx+1)=0$, deci $cosx=0$ sau $cosx=1$. Obținem $x_1=\frac{\pi}{2}$ sau $x_2=\frac{3\pi}{2}$ sau $x_3=\pi$, deci $x\in\left\{\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}\right\}$.	**3p** **2p**

SUBIECTUL II **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$, $A(-2)=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ $A(2)\cdot A(-2)=\begin{pmatrix}-2&1&4\\1&-2&4\\0&0&3\end{pmatrix}$.Suma elementelor este $-2+1+4+1-2+4+3=9=3^2$.	**2p** **3p**
b)	$A(a)\cdot A(b)=\begin{pmatrix}ab+2&a+b+1&a+2\\a+b+1&ab+2&a+2\\b+2&b+2&3\end{pmatrix}$ $A(b)\cdot A(a)=\begin{pmatrix}ab+2&a+b+1&b+2\\a+b+1&ab+2&b+2\\a+2&a+2&3\end{pmatrix}$ $A(a)\cdot A(b)=A(b)\cdot A(a)\Leftrightarrow a+2=b+2\Leftrightarrow a=b$	**2p** **2p** **1p**
c)	$det(A(a))=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&1\end{vmatrix}=(a-1)^2$ Deci pentru $a\neq 1$ avem $det(A(a))\neq 0$, așadar sistemul este compatibil determinat. $d_x=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&a&1\\a^2&1&1\end{vmatrix}=-(a-1)^2(a+1)$ $d_y=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&a^2&1\end{vmatrix}=-a(a-1)^2$.	**1p** **1p** **1p** **1p**

	$d_z = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a^2 \end{vmatrix} = (a-1)^2(a+1)^2$ Rezultă $x = -a-1$, $y = -a$, $z = (a+1)^2$ deci $S = \{(-a-1, -a, (a+1)^2\}$, $a \in \mathbb{R} - \{1\}$.	1p
2.a)	$2 \cdot 2 \cdot a - 10 \cdot 2 - 10a + 55 = -7$ $-6a + 35 = -7 \Leftrightarrow a = 7$.	3p 2p
b)	$2(x-5)(y-5) + 5 = 2xy - 10y - 10x + 50 + 5$ $= 2xy - 10x - 10y + 55 = x \circ y$. Deci $x \circ y = 2(x-5)(y-5) + 5$.	2p 3p
c)	Avem $x \circ 5 = 5, \forall x \in \mathbb{R}$ și $5 \circ y = 5$, $\forall y \in \mathbb{R}$. $1 \circ 2 \circ 3 \circ 4 = x$; $6 \circ 7 \circ \ldots \circ 2020 = y$. Avem $1 \circ 2 \circ 3 \circ \ldots \circ 2020 = x \circ 5 \circ y = 5 \circ y = 5$.	2p 3p

SUBIECTUL III **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = [(x-1)e^{-x} + x]' = [(x-1)e^{-x}]' + 1 = e^{-x} + (x-1)(e^{-x})' + 1 =$ $= e^{-x} - (x-1)e^{-x} + 1$ $= e^{-x}(2-x) + 1$ deci $f'(x) = (2-x)e^{-x} + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.	3p 2p
b)	$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)+f'(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x-1)e^{-x}+x+(2-x)e^{-x}+1}{x} =$ $\lim_{x\to\infty} \frac{(x-1+2-x)e^{-x}+x+1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}+x+1}{x}$ $= \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{1}{xe^x} + 1 + \frac{1}{x}\right) = 1$	3p 2p
c)	$x + 3y = 0$ are panta $-\frac{1}{3}$, tangenta la graficul lui f va avea panta 3, deci $f'(x) = 3 \Leftrightarrow$ $(2-x)e^{-x} = 2 \Leftrightarrow 2 - x = 2e^x$ (1). Observăm că $x = 0$ verifică (1), deci este soluție . Altă soluție nu putem avea pe $\mathbb{R}$, deoarece $2 - x$ este funcție strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$, iar $2e^x$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$. *Obtinem* ecuatia tangentei y+1=3x.	3p 2p
2.a)	$\int_0^1 f_1(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{x+9}dx =$ $= \ln(x+9) \Big\vert_0^1 = \ln 10 - \ln 9 = \ln\frac{10}{9}$	2p 3p
b)	$\int_0^a x\, f_2(x)\, dx = \int_0^a \frac{x}{x^2+9} dx = \frac{1}{2}\int_0^a (\ln(x^2+9))'\, dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+9) \Big\vert_0^a = \frac{1}{2}\ln(a^2+9) - \frac{1}{2}\ln 9 =$ $\frac{1}{2}\ln(a^2+9) - \ln 3$. Din ipoteză avem $\frac{1}{2}\ln(a^2+9) - \ln 3 = \frac{1}{2}\ln\frac{37}{4} - \ln 3$ deci $a^2 + 9 = \frac{37}{4} \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{4}$, rezultă $a = \frac{1}{2}$.	3p 2p
c)	$0 \le x \le 1 \Leftrightarrow 0 \le x^n \le 1 \Leftrightarrow 9 \le x^n + 9 \le 10 \Leftrightarrow \frac{1}{10} \le \frac{1}{x^2+1} \le \frac{1}{9}$. Prin integrare obținem $\frac{1}{10} \le \int_0^1 f_n(x)\, dx \le \frac{1}{9} \Leftrightarrow 0{,}1 \le \int_0^1 f_n(x)\, dx \le 0,(1)$.	3p 2p

„Matematicianul este îmblânzitorul ce a domesticit infinitul.”

Lucian Blaga

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

Model de antrenament **TEST 7**

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați partea imaginară a numărului $z = \frac{1}{1+i}$

5p **2.** Determinați funcția de gradul al doilea $f : R \to R, f(x) = ax^2 + bx + c$știind că este tangentă axei (Ox) în punctul $A(2,0)$ și intersectează axa (Oy) în $B(0,4)$.

5p **3.** Rezolvați ecuația $\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} = \sqrt{2^x}$.

5p **4.** Câte funcții $f: \{0,1,2,3\} \to \{0,1,2,3\}$ au proprietatea că $f(0) \neq 0$?

5p **5.** Fie ΔABC dreptunghic în A, cu $AB = 3\,cm$, $AC = 4\,cm$. Determinați lungimea vectorului $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{MC}$, unde M este mijlocul ipotenuzei.

5p **6.** Dacă $sin2x = \frac{1}{2}$, demonstrați că $sin^4x + cos^4x = \frac{7}{8}$

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $X(a) = I_3 + aA, a \in \mathbb{R}$

5p a) Calculați A^2.

5p b) Demonstrați că $X(a) \cdot X(b) = X(a+b), (\forall)\ a,\ b \in \mathbb{R}$

5p c) Determinați suma elementelor matricei $M = X(-2020) \cdot X(-2019) \cdot \ldots \cdot X(2021)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea asociativă $x * y = xy - 2(x+y) + 6$.

5p a) Demonstrați că $x * y \geq 2, \forall\ x, y \in [2, \infty)$

5p b) Rezolvați ecuația $x * (2x) = 14$.

5p c) Demonstrați că există o infinitate de numere iraționale x, y astfel încât $x * y \in \mathbb{Z}$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln(\sqrt{x})$.

5p a) Calculați $f'(x)$.

5p b) Demonstrați că tangenta la graficul funcției în $A(a, f(a))$ nu este paralelă cu axa (Ox).

5p c) Demonstrați că $f(\sqrt{3}) > f(\sqrt[3]{2})$

2. Fie funcția $f: [1,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x(1+lnx)}$.

5p a) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $[1,\infty)$.

5p b) Determinați o primitivă F a lui f, știind că $F(1) = 0$.

5p c) Determinați $a \in (1, e^2)$ știind că $\int_a^{e^2} f(x)\,dx = ln3 - ln2$.

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

TEST 7

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$z=\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$	**3p**
	$\operatorname{Im}(z)=-\frac{1}{2}$	**2p**
2.	$Gf\cap Oy=\{B(0,4)\}\Leftrightarrow f(0)=4\Leftrightarrow c=4$	**1p**
	$Gf\cap Ox=\{A(2,0)\}\Leftrightarrow f(2)=0\Leftrightarrow 2a+b=-2$	**1p**
	$\Delta=0\Rightarrow b^2-4ac=0\Leftrightarrow b^2=16a\Rightarrow(-2-2a)^2=16a\Rightarrow a^2-2a+1=0\Rightarrow\begin{cases}a=1\Rightarrow b=-4\\ a=-1\Rightarrow b=0 \text{ nu convine}\end{cases}$	**2p**
	$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-4x+4$	**1p**
3.	$2^{x-1}=2^{\frac{x}{2}}$	**3p**
	Din injectivitate, avem că $x-1=\frac{x}{2}\Rightarrow x=2$	**2p**
4.	$f(0)\neq 0\Rightarrow f(0)$ poate lua 3 valori	**2p**
	$f(1), f(2), f(3)$ pot lua câte 4 valori	**2p**
	$3\cdot 4^3=192$ funcții	**1p**
5.	$BC=5\text{ cm}$	**1p**
	$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AM}$	**1p**
	$\lvert\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{MC}\rvert=\lvert\overrightarrow{AM}\rvert=\frac{BC}{2}=\frac{5}{2}$	**3p**
6.	$\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x$	**2p**
	$\sin^4 x+\cos^4 x=1-\frac{\sin^2 2x}{2}=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$	**3p**

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1.a)	$A^2=A\cdot A$	**2p**
	$A^2=O_3$	**3p**
b)	$X(a)\cdot X(b)=\begin{pmatrix}1-2a & -2a & -2a\\ a & a+1 & a\\ a & a & a+1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1-2b & -2b & -2b\\ b & b+1 & b\\ b & b & b+1\end{pmatrix}$	**3p**
	$X(a)\cdot X(b)=\begin{pmatrix}1-2(a+b) & -2(a+b) & -2(a+b)\\ a+b & 1+a+b & a+b\\ a+b & a+b & 1+a+b\end{pmatrix}=X(a+b)$	**2p**
c)	$M=X(-2020)\cdot X(-2019)\cdot\ldots\cdot X(2021)=X(2021)$	**2p**
	Cum suma elementelor lui $X(a)$ este 3, obținem că suma elementelor matricei M este tot 3	**3p**
2.a)	$x*y=(x-2)(y-2)+2$	**2p**

	$x\ge 2\Rightarrow x-2\ge 0, y\ge 2\Rightarrow y-2\ge 0,(x-2)(y-2)\ge 0\Rightarrow x*y\ge 2,(\forall)x,y\in[2,\infty)$	**3p**
b)	$x*(2x)=(x-2)(2x-2)+2=14$ $x^2-3x-4=0\Rightarrow\begin{cases}x=4\\x=-1\end{cases}$	**2p** **3p**
c)	Putem considera $x=\sqrt{k}$, $y=-\sqrt{k}$, $k\ge 0, k\in\square$ $x*y=(\sqrt{k}-2)(-\sqrt{k}-2)+2=-(\sqrt{k}^2-4)+2=-k+6\in\square$	**2p** **3p**

SUBIECTUL III **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $f'(x)=\frac{1}{2x}$	**2p** **3p**
b)	$m_{Ox}=0$ Panta tangentei la graficul funcției în punctul $A(a,f(a))$ este $m=f'(a)=\frac{1}{2a}$ $\frac{1}{2a}\ne 0,(\forall)a\in(0,\infty)\Rightarrow$ tangenta la grafic în $A(a,f(a))$ nu este paralelă axa (Ox)	**2p** **2p** **1p**
c)	Din $f'(x)=\frac{1}{2x}>0$. Așadar f este crescătoare pe $(0,\infty)$. Cum $\sqrt{3}>\sqrt[3]{2}\Rightarrow f(\sqrt{3})>f(\sqrt[3]{2})$	**3p** **2p**
2.a)	Fie F o primitivă a funcției f. Atunci F este crescătoare pe $[1,\infty)$ dacă și numai dacă $F'(x)\ge 0,(\forall)x\in[1,\infty)$ $F'(x)\ge 0,(\forall)x\in[1,\infty)\Leftrightarrow f(x)\ge 0,\ (\forall)x\in[1,\infty)$ Cum $\frac{1}{x(1+\ln x)}>0,\ (\forall)x\in[1,\infty)$ atunci F este crescătoare pe $(\forall)x\in[1,\infty)$	**2p** **3p**
b)	$F=\int\frac{1}{x(1+\ln x)}dx$ Cu substituția $u=1+\ln x$, obținem $F(x)=\int\frac{1}{u}du=\ln\lvert u\rvert+C=\ln\lvert 1+\ln x\rvert+C$ $F(1)=0\Leftrightarrow C=0\Rightarrow F(x)=\ln\lvert 1+\ln x\rvert$	**1p** **2p** **2p**
c)	$\int_a^{e^2}f(x)dx=\ln\lvert 1+\ln x\rvert\Big\vert_a^{e^2}=\ln 3-\ln(1+\ln a)$ $\ln 3-\ln(1+\ln a)=\ln 3-\ln 2\Leftrightarrow\ln(1+\ln a)=\ln 2\overset{inj}{\Rightarrow}1+\ln a=2$ $a=e$	**2p** **2p** **1p**

„**Matematica**, văzută **în mod corect**, arată **nu numai adevărul**, ci şi **frumuseţea supremă**, o frumuseţe rece şi austeră, ca a unei sculpturi.”

Bertrand Russell

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

Model de antrenament **TEST 1**

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $\left(1+\sqrt{2}\right)^2-\left(1-\sqrt{2}\right)^2-\sqrt{32}=0$.

5p **2.** Determinați abscisele punctelor de intersecție ale graficelor funcțiilor $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}, f(x)=x^2-2x$ și $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}, g(x)=x-2$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(1+x)=1-\log_2 x$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să fie un divizor al lui 2020.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$ și $B(2,m)$, unde m este un număr real. Determinați numărul real m, știind că dreapta AB este paralelă cu dreapta de ecuație $y=x+2$.

5p **6.** Demonstrați că $\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)\cdot\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)=\cos x$, oricare ar fi numărul real x.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x\\ 2 & 1+x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p a) Determinați numărul real x, știind că $\det\left(A(x^2)\right)=0$.

5p b) Demonstrați că matricea $B=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ este inversa matricei $A(2)$.

5p c) Determinați numerele reale a și b, știind că $a\cdot\left(A(1)\right)^2-3\cdot A(1)=b\cdot I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=2xy-2x-2y+3$.

5p a) Demonstrați că $x*y=2(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y.

5p b) Determinați numerele întregi x, pentru care $x*x\leq 3$.

5p c) Determinați numerele reale x, pentru care $x*2*x=x$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=1+x+e^{-x}$.

5p a) Arătați că $f'(x)=\frac{e^x-1}{e^x}, x\in\boldsymbol{R}$.

5p b) Determinați abscisa punctului situat pe graficul funcției f, în care tangenta la graficul funcției este paralelă cu axa Ox.

5p c) Demonstrați că $1-x\leq e^{-x}$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\boldsymbol{R},\ f(x)=2x+\ln x$.

5p a) Calculați $\int_1^2\left(f(x)-\ln x\right)dx$.

5p b) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este convexă pe $(0,+\infty)$.

5p c) Arătați că $\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx=\frac{4e-3}{2}$.

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

TEST 1

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\left(1+\sqrt{2}\right)^2=1+2\sqrt{2}+2$ $\left(1-\sqrt{2}\right)^2=1-2\sqrt{2}+2$ Finalizare	**1p** **2p** **2p**
2.	$f(x)=g(x)\Rightarrow x^2-3x+2=0$ $x_1=1, x_2=2$	**2p** **3p**
3.	$1+x>0, x>0\Rightarrow x\in(0,+\infty)$ $\log_2(1+x)+\log_2 x=1\Rightarrow\log_2 x(1+x)=1\Rightarrow x^2+x-2=0$ $x_1=-2, x_2=1, x\in(0,+\infty)\Rightarrow x=1$	**1p** **1p** **3p**
4.	Cazuri favorabile: 1,2,4,5 $\Rightarrow$ 4 cazuri favorabile Cazuri posibile: mulţimea are 10 elemente $\Rightarrow$ 10 cazuri posibile $P=\frac{număr\ cazuri\ favorabile}{număr\ cazuri\ posibile}$ Finalizare: $P=\frac{2}{5}$	**2p** **1p** **1p** **1p**
5.	$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}\Rightarrow m_{AB}=m-1$ $d: y=x+2\Rightarrow m_d=1$ $AB\|\|d\Leftrightarrow m_{AB}=1$ $m=2$	**2p** **1p** **1p** **1p**
6.	$\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)=\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2-\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2=$ $=\cos 2\left(\frac{x}{2}\right)=\cos x$	**3p** **2p**

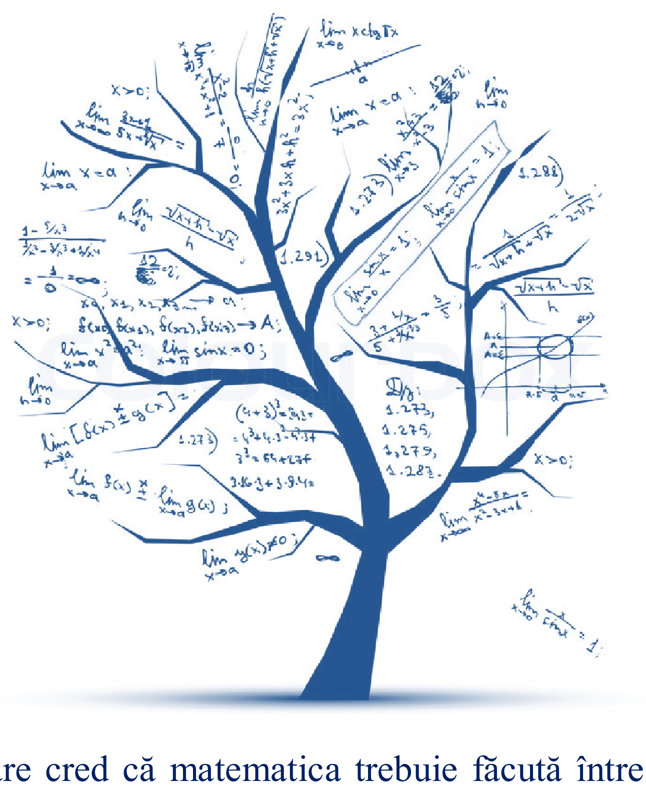
SUBIECTUL II (30 de puncte)

1.a)	$A(x^2)=\begin{pmatrix}1 & x^2\\ 2 & 1+x^2\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(x^2)\right)=\begin{vmatrix}1 & x^2\\ 2 & 1+x^2\end{vmatrix}=1-x^2$ $\det\left(A(x^2)\right)=0\Rightarrow 1-x^2=0\Rightarrow x_1=1, x_2=-1$	**3p** **2p**
b)	$A(2)\cdot B=I_2$ $B\cdot A(2)=I_2$ $A(2)\cdot B=B\cdot A(2)=I_2\Rightarrow A(2)$ inversabilă şi $(A(2))^{-1}=B$	**2p** **1p** **2p**
c)	$A(1)\cdot(1)=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 6 & 6\end{pmatrix}$ $a\cdot A(1)\cdot A(1)-3\cdot A(1)=b\cdot I_2\Rightarrow\begin{pmatrix}3a-3 & 3a-3\\ 6a-6 & 6a-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$ $\Rightarrow a=1, b=0$	**1p** **2p** **2p**
2.a)	$x*y=2xy-2x-2y+2+1=$ $=2x(y-1)-2(y-1)+1=$ $=2(x-1)(y-1)+1$	**1p** **2p** **2p**
b)	$x*x=2x^2-4x+3$ $x*x\le 3\Rightarrow x^2-2x\le 0\Rightarrow x\in[0,2]$ Finalizare $x\in\{0,1,2\}$	**1p** **3p** **1p**

c)	$x * 2 * x = (x * 2) * x = 4(x-1)^2 + 1$ $\Rightarrow (x-1)[4(x-1)-1] = 0 \Rightarrow (x-1)(4x-5) = 0$ $x = 1, x = \frac{5}{4}$	**1p** **2p** **2p**

SUBIECTUL III **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = (1 + x + e^{-x})' = (1)' + (x)' + (e^{-x})' =$ $= 1 - e^{-x}$	**1p** **4p**
b)	$M_0(x_0, f(x_0)) \in G_f, f'(x_0) = 0 \Rightarrow 1 - e^{-x_0} = 0$ $\Rightarrow x_0 = 0$	**3p** **2p**
c)	$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0; f$ descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ și f crescătoare pe $[0, +\infty)$ $\Rightarrow x = 0$ punct de minim global și $f(0) = 2$ valoare minimă globală $\Rightarrow f(x) \geq 2, \forall x \in \boldsymbol{R} \Rightarrow e^{-x} \geq 1 - x, \forall x \in \boldsymbol{R}$	**2p** **2p** **1p**
2.a)	$\int_1^2 [f(x) - \ln x] dx = \int_1^2 2x\, dx = x^2 \mid_1^2 =$ $2^2 - 1^2 = 3$	**3p** **2p**
b)	Fie $F: (0, +\infty) \to \boldsymbol{R}$ o primitivă a funcției $f \Rightarrow F$ derivabilă pe $(0, +\infty)$ și $F'(x) = f(x), \forall x \in (0, +\infty)$ $F''(x) = f'(x) = 2 + \frac{1}{x} > 0, \forall x \in (0, +\infty)$ $F''(x) > 0, \forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow F$ convexă pe $(0, +\infty)$	**2p** **2p** **1p**
c)	$\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx = \int_1^e 2\, dx + \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = 2x \mid_1^e + \frac{(\ln x)^2}{2} =$ $= \frac{4e-3}{2}$	**3p** **2p**



„Sunt unii oameni care cred că matematica trebuie făcută între cutare şi cutare oră. Nu e adevărat. ***Matematica nu se face la ore fixe***. Matematica se face când îţi vine o idee. Noaptea sau dimineaţa, când te scoli, când te speli, te gândeşti. Dacă nu te speli, te gândeşti când nu te speli...”

Grigore Moisil

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

Model de antrenament **TEST 2**

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați modulul numărului complex $z=\left(\frac{1}{2}-i\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-2i\right)$, unde $i\in \mathbb{C}$, $i^2=-1$.

5p **2.** Determinați numărul real a știind că punctul $A(2,5)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+a-1$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(4x+1)-\log_2 5=2\log_2 3$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 20.

5p **5.** În sistemul xOy se consideră punctele $A(2,6)$ și $B(6,-8)$. Determinați distanța dintre mijloacele segmentelor OA și AB.

5p **6.** Dacă $x\in(0,90^\circ)$ astfel încât $\sin^2 x+\sin^2 30^\circ=1$, calculați $\sin(90^\circ+x)$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix} x+1 & 1-x \\ x & 1\end{pmatrix}$, unde x este un număr real și $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

5p a) Arătați că $\det(A(2)+I_2)=10$.

5p b) Determinați matricea X pentru care $A(1)\cdot X=A(-1)\cdot A(1)$.

5p c) Determinați suma soluțiilor reale ale ecuației $\det\left(x\cdot A(x)-A\left(x^2\right)\right)=2020$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=x+y+3xy$.

5p a) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $1\circ x=13$.

5p b) Determinați elementul neutru al legii “$\circ$”.

5p c) Știind că a,b sunt numere reale nenule astfel încât $a\circ b\circ(ab)=a+b$, calculați $a\circ b$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{3x^2+2}{x}-5\ln x$.

5p a) Arătați că $f'(x)=\frac{(3x+1)(x-2)}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$ situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Arătați că **nu** există asimptotă spre $+\infty$ la graficul funcției f.

2. Se consideră funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+6\sqrt{x}+3$.

5p a) Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(4)=2$.

5p b) Arătați că. $\int_1^e\left(f(x)-6\sqrt{x}-3\right)\cdot \ln x\,dx=\frac{e^2+1}{4}$

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care. $\int_0^n \frac{f(x)-6\sqrt{x}}{(f(x^2))^2}dx=\frac{3}{20}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

TEST 2

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$z=\frac{1}{4}-i+i^2+\frac{3}{4}-i=\frac{1}{4}-1+\frac{3}{4}-2i=-2i$	**3p**
	$\lvert z\rvert=2$	**2p**
2.	$f(2)=2a+a-1=3a-1$	**3p**
	$3a-1=5 \Leftrightarrow a=2$	**2p**
3.	$\log_2\left(\frac{4x+1}{5}\right)=\log_2 9 \Leftrightarrow \frac{4x+1}{5}=9$	**3p**
	$\Leftrightarrow x=11$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de trei cifre are 900 de elemente, deci sunt 900 de cazuri posibile	**2p**
	Mulțimea numerelor naturale de trei cifre care au produsul cifrelor egal cu 20 este $\{145, 154, 451, 415, 514, 541, 225, 252, 522\}$, deci sunt 9 cazuri favorabile	**2p**
	$P=\frac{9}{900}=\frac{1}{100}$	**1p**
5.	Mijloacele segmentelor OA și AB sunt $M(1,3)$, respectiv $N(4,-1)$.	**3p**
	$MN=\sqrt{(4-1)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{9+16}=5$	**2p**
6.	$\sin^2 x+\sin^2 30°=1 \Leftrightarrow \cos^2 x=\frac{1}{4}$, dar $x\in(0,90°)$, deci $\cos x=\frac{1}{2}$	**3p**
	$\sin(90°+x)=\sin 90°\cdot\cos x+\cos 90°\cdot\sin x=\frac{1}{2}$	**2p**

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. a)	$A(2)=A(x)=\begin{pmatrix}2+1 & 1-2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $A(2)+I_2=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$	**3p**
	$\det(A(2)+I_2)=\begin{vmatrix}4 & -1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=4\cdot 2-(-1)\cdot 2=8+2=10$	**2p**
b)	$A(-1)\cdot A(1)=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$	**2p**
	$\det A(1)=2$, $(A(1))^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$	**2p**
	$X=(A(1))^{-1}\cdot\begin{pmatrix}2 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}$	**1p**
c)	$x\cdot A(x)=\begin{pmatrix}x^2+x & x-x^2\\ x^2 & x\end{pmatrix}$, $A(x^2)=\begin{pmatrix}x^2+1 & 1-x^2\\ x^2 & 1\end{pmatrix}$	**2p**
	$x\cdot A(x)-A(x^2)=\begin{pmatrix}x-1 & x-1\\ 0 & x-1\end{pmatrix}$, $\det\left(x\cdot A(x)-A(x^2)\right)=(x-1)^2$	

	$(x-1)^2=2020 \Leftrightarrow x^2-2x-2019=0$, cu $\Delta=4+4\cdot 2019>0$ și $x_1+x_2=2$	2p 1p
2. a)	$1\circ x=1+x+3\cdot 1\cdot x=1+x+3x=1+4x$ $4x+1=13 \Leftrightarrow x=3$	3p 2p
b)	$x\circ e=x+e+3xe=e+x+3ex=e\circ x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$ $e+x+3ex=x \Leftrightarrow e(1+3x)=0$, pentru orice $x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow e=0$	2p 3p
c)	$a+b+3ab+ab+3ab(a+b+3ab)=a+b \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow ab(4+3a+3b+9ab)=0$; dar $ab\neq 0$, deci $4+3a+3b+9ab=0$ $\Leftrightarrow 3(a+b+3ab)=-4 \Leftrightarrow a\circ b=-\dfrac{4}{3}$	2p 2p 1p

SUBIECTUL III **(30 de puncte)**

1. a)	$f'(x)=\dfrac{(3x^2+2)'\cdot x-(3x^2+2)\cdot(x)'}{x^2}-\dfrac{5}{x}=\dfrac{6x^2-3x^2-2}{x^2}-\dfrac{5}{x}=$ $=\dfrac{3x^2-5x-2}{x^2}=\dfrac{(3x+1)(x-2)}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$	3p 2p
b)	$y-f(1)=f'(1)(x-1)$ $f(1)=5$, $f'(1)=-4$ $y-5=-4(x-1) \Leftrightarrow 4x+y-9=0$	2p 2p 1p
c)	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} x\left(3+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{5\ln x}{x}\right)$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, deci nu există asimptotă orizontală $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+2}{x^2}-\dfrac{5\ln x}{x}\right)=3$, $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-3x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{x}-5\ln x\right)=-\infty$, deci nu există asimptotă oblică spre $+\infty$.	2p 3p
2. a)	$\int f(x)dx=\dfrac{x^2}{2}+4x\sqrt{x}+3x+C \Rightarrow F(x)=\dfrac{x^2}{2}+4x\sqrt{x}+3x+c$ este o primitivă a funcției f $F(4)=8+32+12+c=52+c$, $52+c=2 \Leftrightarrow c=-50$, deci $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+4x\sqrt{x}+3x-50$	3p 2p
b)	$\int_1^e (f(x)-6\sqrt{x}-3)\cdot\ln x\,dx=\int_1^e x\cdot\ln x\,dx=$ $=\dfrac{x^2}{2}\ln x\Big\vert_1^e-\int_0^1\dfrac{x^2}{2}\cdot\dfrac{1}{x}dx=\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{x^2}{4}\Big\vert_1^e=\dfrac{e^2+1}{4}$	2p 3p
c)	$\int_0^n\dfrac{f(x)-6\sqrt{x}}{(f(x^2))^2}dx=\int_0^n\dfrac{x+3}{(x^2+6x+3)^2}dx=$ $\dfrac{1}{2}\int_3^{n^2+6n+3}\dfrac{1}{t^2}dt=-\dfrac{1}{2t}\Big\vert_3^{n^2+6n+3}=\dfrac{n^2+6n}{6(n^2+6n+3)}$ $\dfrac{n^2+6n}{6(n^2+6n+3)}=\dfrac{3}{20} \Leftrightarrow n=-9$, care nu convine sau $n=3$, care convine	1p 2p 2p

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

Model de antrenament **TEST 3**

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați numărul real pozitiv x astfel încât *3, x-5, 12* sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

5p **2.** Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției $f: R \to R, f(x) = 3^{x-1} - 81$ cu axa Ox.

5p **3.** Rezolvați ecuația $C_n^2 = 4 \cdot A_n^1, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

5p **4.** Să se calculeze TVA-ul pentru un autoturism știind că prețul de vânzare este 8680 de euro iar procentul TVA-ului este de 24%.

5p **5.** Fie punctele A(2, -3), B(1, 5) și C(-3,2). Calculați modulul vectorului $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Calculați aria unui triunghi ABC cu AB=AC=8 și $m(\widehat{BAC}) = 120^\circ$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 2x-4 & 1 \\ 1 & 2x-4 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{Z}$.

5p **a)** Demonstrați că $A(1) + A(-1) = 2A(0)$.

5p **b)** Să se arate că $detA(x) \leq 0, (\forall) x \in \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$.

5p **c)** Să se determine numărul real x pentru care $A^2(x) = 2A(x)$, unde $A^2(x) = A(x) \cdot A(x)$.

2.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + a}$,
$a \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Determinați numărul real a astfel încât $1 * 2 = 3$.

5p **b)** Pentru $a = -1$ determinați simetricul lui $x = \sqrt[3]{3}$ în raport cu legea de compoziție ” * ”.

5p **c)** Demonstrați că funcția $f: R \to R, f(x) = \sqrt[3]{x - a}$ verifică relația:
$f(x + y) = f(x) * f(y), (\forall)\, x, y \in R$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Fie funcția $f: R \to R, f(x) = \frac{x^3}{x^2+4}$.

5p a) Determinați ecuația asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcției f.

5p b) Demonstrați că are loc egalitatea $2xf(x) + (x^2 + 4)f'(x) = 3x^2, (\forall) x \in R$.

5p c) Să se arate că funcția $g: R \to R, g(x) = f(x) - x$ are două puncte de extrem.

2. Se consideră funcțiile $f, g: [1, +\infty) \to R,\ f(x) = \frac{lnx}{x}, g(x) = \frac{1-lnx}{x^2}$.

5p a) Arătați că funcția f este o primitivă a funcției g.

5p b) Calculați $\int_1^e g(x)dx$.

5p c) Știind că $lnx < x$ pentru orice $x \in (1, +\infty)$, să se arate că $\int_1^2 f(x)dx < 1$.

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

TEST 3

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	Scrie condiția ca numerele date să formeze progresie geometrică: $(x-5)^2 = 3 \cdot 12$ Obține $x-5=\pm 6 \Leftrightarrow x=11\ sau\ x=-1$ Soluția $x=11$	**2p** **2p** **1p**
2.	Intersecția graficului cu axa Ox: $f(x)=0 \Leftrightarrow 3^{x-1}=81$ Obține x=5 Scrie coordonatele punctului: A(5,0)	**2p** **2p** **1p**
3.	Obține: $\frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!} = 4\frac{n!}{(n-1)!}$ Deduce : $n(n-1)=8n \Leftrightarrow n=0\ sau\ n=9$ Soluția: $n=9$ convine	**2p** **2p** **1p**
4.	Dacă notăm cu x prețul de producție: $x+24\%x=8680$ Obține $x=7000$ TVA-ul este 1680	**2p** **2p** **1p**
5.	Calculează: $\overrightarrow{AB}=-\vec{i}+8\vec{j}, \overrightarrow{AC}=-5\vec{i}+5\vec{j}$ Deduce $\vec{u}=13\vec{i}+\vec{j}$ Obține $\lvert\vec{u}\rvert=\sqrt{170}$	**2p** **2p** **1p**
6.	Aria triunghiului:$A=\frac{AB\cdot AC\cdot sin120^{\circ}}{2}$ Calculează: $sin120^{\circ}=sin30^{\circ}=\frac{1}{2}$ Obține aria: *A=16*	**1p** **2p** **2p**

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1.a)	Calculează: $A(1)+A(-1)=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6 & 1\\ 1 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & 2\\ 2 & -8\end{pmatrix}$ Calculează: $2A(0)=2\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 1 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & 2\\ 2 & -8\end{pmatrix}$ Finalizare	**2p** **2p** **1p**
b)	Calculează: $detA(x)=(2x-4)^2-1=(2x-5)(2x-3)$ Rezolvă inecuația : $detA(x)\le 0 \Leftrightarrow x\in\left[\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right]$	**3p** **2p**
c)	$A^2(x)=\begin{pmatrix}2x-4 & 1\\ 1 & 2x-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2x-4 & 1\\ 1 & 2x-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(2x-4)^2+1 & 4x-8\\ 4x-8 & (2x-4)^2+1\end{pmatrix}$ Calculează $2A(x)=\begin{pmatrix}4x-8 & 2\\ 2 & 4x-8\end{pmatrix}$ Deduce : $\begin{cases}(2x-4)^2+1=4x-8\\ 4x-8=2\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{5}{2}.$	**2p** **1p** **2p**
2.a)	Calculează: $1*2=\sqrt[3]{9+a}$ Obține: $\sqrt[3]{9+a}=3 \Leftrightarrow 9+a=27$ Găsește a=18	**2p** **2p** **1p**
b)	Determină elementul neutru : $e=1$ Determină forma simetricului unui element: $x'=\sqrt[3]{2-x^3}$ Găsește simetricul lui $\sqrt[3]{3}$: $(\sqrt[3]{3})'=\sqrt[3]{-1}=-1$	**2p** **2p** **1p**

c)	Calculează: $f(x+y)=\sqrt[3]{x+y-a}$ Calculează : $f(x)*f(y)=\sqrt[3]{f^3(x)+f^3(y)+a}=\sqrt[3]{x-a+y-a+a}$ Finalizare	**2p** **2p** **1p**

SUBIECTUL III **(30 de puncte)**

1.a)	Calculează: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, și deduce că nu există asimptotă orizontală Calculează $m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1, n=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)=0$ Asimptota oblică este: y=x	**2p** **2p** **1p**
b)	Calculează: $f'(x)=\frac{x^4+12x^2}{(x^2+4)^2}$ Demonstrează relația de egalitate	**3p** **2p**
c)	Determină $g'(x)=\frac{4x^2-16}{(x^2+4)^2}$ Determină intervalele de monotonie Deduce x = - 2 punct de maxim , x = 2 punct de minim	**2p** **2p** **1p**
2.a)	Funcția f este primitiva funcției g: f derivabilă și $f'(x)=g(x), (\forall)x\in[1,+\infty)$ Calculează $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-lnx}{x^2}=g'(x)$.	**2p** **3p**
b)	Calculează $\int_1^e g(x)dx=f(x)\|_1^e$ Obține: $\int_1^e g(x)dx=\frac{1}{e}$	**3p** **2p**
c)	Deduce $lnx<x\Leftrightarrow\frac{lnx}{x}<1, (\forall)x\in[1,2]$ Deduce $\int_1^2\frac{lnx}{x}dx<\int_1^2 1\cdot dx$ Finalizare	**2p** **2p** **1p**

„Raţionamentul matematic are în el însuşi un fel de virtute creatoare şi prin urmare se deosebeşte de silogism"

H. Poincare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

Model de antrenament **TEST 4**

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Să se arate că numărul $C_4^2 + A_5^3 - P_2$ este divizibil cu 16.

5p **2.** Determinați coordonatele punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - x$ și $g(x) = 2x - 2$.

5p 3. Rezolvați ecuația $log_7(x^2 - 4) - log_7(3x) = 0$.

5p **4.** Determinați numărul elementelor unei mulțimi știind că are 512 submulțimi.

5p **5.** Fie punctele $B(-5,-3)$ și $C(3,-1)$. Determinați punctul $\mathrm{A(m,m)}$ astfel încât dreptele AB și BC să fie perpendiculare.

5p **6.** Arătați că $sin2x = -\frac{24}{25}$, știind că $sinx = \frac{3}{5}, x \in (90^\circ, 180^\circ.)$

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ ax + y + z = 2a \end{cases}, a \in R.$

5p a) Determinați numărul real a știind că $(1,1,1)$ este o soluție a sistemului.

5p b) Arătați că matricea sistemului este inversabilă pentru orice $\mathrm{a} \in \mathrm{R} - \{1\}$.

5p c) Determinați numărul $a \in R - \{1\}$ pentru care $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 5$ unde $(x_{0,}y_0, z_0)$ este soluția sistemului.

2. Pe intervalul $(\sqrt{3}, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x * y = \sqrt{x^2y^2 - 3x^2 - 3y^2 + 12}$.

5p a) Demonstrați că $x * y = \sqrt{(x^2 - 3)(y^2 - 3) + 3}, (\forall) x, y \in (\sqrt{3}, +\infty)$.

5p b) Demonstrați că legea de compoziție ” * ” este asociativă.

5p c) Rezolvați ecuația $x * x * x = 2$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \to R, f(x) = \sqrt{x} - lnx$.

5p a) Demonstrați că $\lim_{x \to 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = 0$.

5p b) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției în punctul de abscisă $x_0 = 1$.

5p c) Demonstrați că $\frac{f(x)}{2} \geq ln\frac{e}{2}, (\forall) x \in (0, +\infty)$.

2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \to R, f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2}$.

5p a) Determinați primitiva $F: (0. +\infty) \to R$ a funcției f al cărei grafic conține punctul $A(1,1)$.

5p b) Calculați $\int_1^e \left(f(x) - \frac{x+1}{x^2}\right) lnxdx$.

5p c) Demonstrați că $\int_1^2 \frac{f'(x)}{f(x)} dx < 0$.

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

TEST 4

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	Calculează $C_4^2 = 6, A_5^3 = 60, P_2 = 2$ Obține $C_4^2 + A_5^3 - P_2 = 64$ Finalizare	**3p** **1p** **1p**
2.	Scrie $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$ Determină: $x_1 = 1, x_2 = 2$ Obține punctele $A(1,0)$ $și$ $B(2,2)$	**2p** **1p** **2p**
3.	Scrie ecuația $\log_7(x^2 - 4) = \log_7 3x \Leftrightarrow x^2 - 4 = 3x$ Rezolvă ecuația $x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 4, x_2 = -1$ Soluție $x = 4$, care convine	**2p** **2p** **1p**
4.	Numărul submulțimilor unei mulțimi cu n elemente este 2^n Scrie $2^n = 512 \Leftrightarrow 2^n = 2^9$ Obține $n = 9$	**2p** **2p** **1p**
5.	Pune condiția de perpendicularitate: $m_{AB} \cdot m_{BC} = -1$ Calculează $m_{AB} = \frac{-3-m}{-5-m}, m_{BC} = \frac{1}{4}$ Obține $m = -\frac{23}{5}$	**1p** **2p** **2p**
6.	Determină $cosx = -\frac{4}{5}$ Scrie $sin2x = 2sinxcosx = -\frac{24}{25}$	**3p** **2p**

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1.a)	Verifică $1 - 1 + 1 = 1$ $și$ $1 + 1 + 1 = 3$ Găsește $a + 1 + 1 = 2a$ Obține $a = 2$	**2p** **2p** **1p**
b)	Scrie matricea A a sistemului și pune condiția $detA \neq 0$ Calculează $detA = -2a + 2$ Obține $a \in R\backslash\{1\}$	**2p** **2p** **1p**
c)	Obține soluția $(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{2a-3}{a-1}, 1, \frac{1}{a-1}\right)$ Obține ecuația $\frac{(2a-3)^2+(a-1)^2+1}{(a-1)^2} = 5$ Obține $a = \frac{3}{2}$	**2p** **1p** **2p**
2.a)	Transformă $x^2y^2 - 3x^2 - 3y^2 + 12 = x^2(y^2 - 3) - 3(y^2 - 3) + 3$ Finalizare	**2p** **3p**
b)	Asociativitatea: $(x * y) * z = x * (y * z), (\forall)x, y, z \in (\sqrt{3}, +\infty)$ Calculează $(x * y) * z = \sqrt{(x^2 - 3)(y^2 - 3)(z^2 - 3) + 3}$ Finalizare	**1p** **2p** **2p**
c)	Obține ecuația $\sqrt{(x^2 - 3)^3 + 3} = 2$ Găsește $x_1 = 2$ $și$ $x_2 = -2$ Soluția este x=2, care convine	**2p** **2p** **1p**

SUBIECTUL III **(30 de puncte)**

1.a)	Calculează $f'(x)=\frac{\sqrt{x}-2}{2x}$ Obține $f'(4)=0$ Determină $\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=f'(4)=0$	**2p** **1p** **2p**
b)	Scrie ecuația tangentei: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ Calculează $f(1)=1, f'(1)=-\frac{1}{2}$ Obține ecuația $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$	**1p** **2p** **2p**
c)	Rezolvă ecuația $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=4$ Arată că f descrescătoare pentru $x\in(0,4]$, f crescătoare pentru $x\in[4,+\infty)$ și deduce că x=4 este punct de minim Obține $f(x)\geq f(4) \Leftrightarrow f(x)\geq 2(1-ln2) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{2}\geq ln\frac{e}{2}$	**1p** **2p** **2p**
2.a)	Determină $F(x)=\int dx+\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{1}{x^2}dx=x+lnx-\frac{1}{x}+C$ Pune condiția $F(1)=1 \Leftrightarrow C=1$ Finalizare	**2p** **2p** **1p**
b)	Obține $\int_1^e\left(f(x)-\frac{x+1}{x^2}\right)lnxdx=\int_1^e lnxdx$ Aplică metoda integrării prin părți: $\int_1^e lnxdx=xlnx\vert_1^e-x\vert_1^e=1$	**2p** **3p**
c)	Calculează $\frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{x^2+2x}{x^2(x^2+x+1)}$ Arată $\frac{f'(x)}{f(x)}<0,(\forall)x\in[1,2]$ Finalizare	**2p** **2p** **1p**

"**Numerele sunt creaţii libere ale spiritului omenesc**, ele servesc ca un mijloc pentru a concepe mai uşor şi mai precis varietatea lucrurilor... ca puncte principale menţionez aici distincţia netă dintre finit şi infinit, conceptul de număr al lucrurilor, **inducţia** ca metodă de demonstraţie, cunoscută sub numele de inducţie completă ....**are o reală forţă demonstrativă** şi că **definiţia prin inducţie** (sau recursie) este **determinată şi necontradictorie**"

Richard Dedekind – „Ce sunt şi ce reprezintă numerele”

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

Model de antrenament **TEST 5**

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că numărul $a=\log_3\left(\sqrt[3]{11}-\sqrt[3]{2}\right)+\log_3\left(\sqrt[3]{121}+\sqrt[3]{22}-\sqrt[3]{4}\right)$ este natural.

5p **2.** Se consideră funcția $f:R\to R$, $f(x)=2x^2+x-1$. Determinați coordonatele punctului de intersecție dintre graficul funcției f și axa ordonatelor.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x+2}=\left(\frac{1}{4}\right)^{5-2x}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, acesta să nu fie divizibil cu 3.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,-4)$, $B(-1,6)$ și $C(4,-2)$. Să se calculeze distanța de la punctul C la mijlocul segmentului AB.

5p **6.** Arătați că $\cos 150^0+\operatorname{ctg} 45^0+\sin 60^0=1$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2&-2\\-1&1\end{pmatrix}$ și $M(x)=I_2+xA$, unde x este număr real.

5p a) Arătați că $A^2=3A$, unde $A^2=A\cdot A$.

5p b) Demonstrați că $M(x)M(y)=M(x+y+3xy)$, oricare ar fi $x,y\in R$.

5p c) Arătați că pentru $x\neq-\frac{1}{3}$ inversa matricei $M(x)$ este matricea $M\left(\frac{-x}{1+3x}\right)$.

2. Pe mulțimea $G=(1,+\infty)$ se consideră operația $x\circ y=3(xy-x-y)+4$, oricare ar fi $x,y\in G$

5p a) Arătați că $x\circ y=3(x-1)(y-1)+1$, oricare ar fi $x,y\in G$.

5p b) Demonstrați că $x\circ y\in G$, oricare ar fi $x,y\in G$.

5p c) Dați exemplu de două numere $a,b\in Q\setminus Z$ pentru care $a\circ b\in N$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x+1}{x}$.

5p a) Arătați că $f'(x)=\frac{-\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p c) Arătați că $f(\sqrt{2021})\le f(\sqrt{2020})$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

5p a) Arătați că $\int_0^3 f^2(x)dx=12$.

5p b) Determinați primitiva $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{x}{f(x)}$ care verifică condiția $G(0)=2021$.

5p c) Determinați numărul real nenul a, știind că $\int_0^a f(x)\cdot f'(x)dx=\frac{a}{2}$.

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

TEST 5

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a=\log_3\left(\sqrt[3]{11}-\sqrt[3]{2}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{11^2}+\sqrt[3]{2\cdot 11}-\sqrt[3]{2^2}\right)=\log_3\left(\sqrt[3]{11^3}-\sqrt[3]{2^3}\right)=$	**2p**
	$=\log_3(11-2)=\log_3 9=2\in\mathbb{N}$	**3p**
2.	$f(0)=-1$	**3p**
	Punctul de intersecție dintre graficul funcției f și axa ordonatelor este $A(0,\ -1)$	**2p**
3.	$2^{x+2}=2^{-10+4x}\Leftrightarrow x+2=-10+4x$	**3p**
	$3x=12\Rightarrow x=4$	**2p**
4.	Mulțimea A are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea A sunt 3 numere divizibile cu 3, deci sunt $10-3=7$ cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{7}{10}$	**2p**
5.	Fie $M(x,\ y)$ mijlocul segmentului AB $x=\dfrac{1+(-1)}{2}=0,\ y=\dfrac{-4+6}{2}=1\Rightarrow M(0,\ 1)$	**2p**
	$MC=\sqrt{(4-0)^2+[1-(-2)]^2}=5$	**3p**
6.	$\cos 150^0=\cos\left(180^0-30^0\right)=-\cos 30^0=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{ctg}45^0=1$, $\sin 60^0=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	**3p**
	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=1$	**2p**

SUBIECTUL II **(30 de puncte)**

1.a)	$A^2=\begin{pmatrix}2&-2\\-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-2\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-6\\-3&3\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=3\cdot\begin{pmatrix}2&-2\\-1&1\end{pmatrix}=3A$	**2p**
b)	$M(x)M(y)=(I_2+xA)(I_2+yA)=I_2+xA+yA+xyA^2$	**3p**
	Folosind relația de la punctul **a)** avem $M(x)M(y)=I_2+xA+yA+3xyA=$ $=I_2+(x+y+3xy)A=M(x+y+3xy)$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$	**2p**
c)	Folosind relația de la punctul **b)** avem $M(x)M\left(\dfrac{-x}{1+3x}\right)=M\left(x+\dfrac{-x}{1+3x}+\dfrac{3x(-x)}{1+3x}\right)=$	**3p**
	$M(0)=I_2$, unde $x\neq-\dfrac{1}{3}$	**2p**

2.a)	$x \circ y = 3(xy - x - y) + 4 = 3xy - 3x - 3y + 3 + 1 =$	2p
	$= 3x(y-1) - 3(y-1) + 1 = 3(x-1)(y-1) + 1$, oricare ar fi $x, y \in G$	3p
b)	Fie $x, y \in G \Leftrightarrow x > 1, y > 1 \Rightarrow (x-1)(y-1) > 0$	2p
	$\Rightarrow 3(x-1)(y-1) > 0 \Rightarrow 3(x-1)(y-1) + 1 > 1 \Rightarrow x \circ y \in G$	3p
c)	De exemplu $a = \frac{7}{5} \in Q \setminus Z$, $b = \frac{8}{3} \in Q \setminus Z$	2p
	$a \circ b = 3\left(\frac{7}{5} - 1\right)\left(\frac{8}{3} - 1\right) + 1 = 2 + 1 = 3 \in N$	3p

SUBIECTUL III **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \frac{(\ln x)' \cdot x - (\ln x + 1) \cdot x'}{x^2}$	2p
	$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x - 1}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$	3p
b)	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x + 1}{x} \underset{L'H}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$	3p
	Dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f	2p
c)	$1 < \sqrt{2020} < \sqrt{2021}$ și $f'(x) \le 0, \forall x \in [1, +\infty) \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $[1, +\infty)$	3p
	$\Rightarrow f(\sqrt{2021}) \le f(\sqrt{2020})$	2p
2.a)	$\int_0^3 f^2(x)\,dx = \int_0^3 (x^2 + 1)\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right\|_0^3 + \left.x\right\|_0^3 =$	3p
	$= 9 + 3 = 12$	2p
b)	$g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \Rightarrow G(x) = \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\,dx = \int \left(\sqrt{x^2 + 1}\right)' dx = \sqrt{x^2 + 1} + \mathcal{C}$	2p
	Cum $G(0) = 2021 \Rightarrow \mathcal{C} = 2020$, deci $G(x) = \sqrt{x^2 + 1} + 2020$	3p
c)	$\int_0^a f(x) \cdot f'(x)\,dx = \left.\frac{f^2(x)}{2}\right\|_0^a = \frac{a^2}{2}$	2p
	$\frac{a^2}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow a^2 = a$ și, cum a este număr real nenul, obținem $a = 1$	3p

„***Obiectul matematicii*** este atât de serios, încât este util să nu pierdem ocazia pentru a-l face puţin mai distractiv"
Blaise Pascal

Filiera vocaţională, profilul pedagogic, specializarea învăţător-educatoare

Model de antrenament **TEST 1**

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați mulțimea A= $\{x \in \mathbb{N} / \ x^2 + 7x - 8 = 0\}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x - 5$. Determinați numărul real a pentru care $f(2a) - f(a) = 9$.

5p **3.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr de două cifre, acesta să aibă ambele cifre pare şi nenule.

5p **4.** Determinați numărul real x pentru care $\frac{1}{3^x} = \frac{5^x}{225}$.

5p **5.** Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul $A(2; 1)$ şi este paralelă cu dreapta de ecuație $y = -3x + 1$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ΔABC dreptunghic în A, cu $AB = 4$. Calculați $cosB$ ştiind că aria triunghiului este egală cu 20.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = xy - 3x - 3y + 12$.

5p **1.** Arătați că $(3 * 5) + (6 * 4) = 9$.

5p **2.** Demonstrați că $x * y = (x - 3)(y - 3) + 3$, pentru orice numere reale x şi y .

5p **3.** Determinați numerele reale strict pozitive x pentru care $log_2 x * log_3 x = 3$.

5p **4.** Calculați $\sqrt{1} * \sqrt{2} * \sqrt{3} * \ldots\ldots.. * \sqrt{10}$.

5p **5.** Determinați perechile de numere întregi $(a; b)$ pentru care $a^2 * b^2 = 4$.

5p **6.** Demonstrați că $(x + 1) * (y - 2) = (x - 2) * (y + 1)$ dacă şi numai dacă $x = y$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

Se consideră matricele $M(a) = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ -2a & 1+2a \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, unde a este un număr real.

5p **1.** Calculaţi $M(1) - 2M(0)$.

5p **2.** Demonstrați că $det(M(a) - I_2) = 0$, pentru orice număr real a.

5p **3.** Determinați numerele reale a pentru care $M(a^2) - M(2a) = O_2$.

5p **4.** Demonstrați că $M(x) \cdot M(y) = M(x + y + xy)$, pentru orice numere reale x şi y .

5p **5.** Calculați $M(1) \cdot M(2) \cdot M(3)$.

5p **6.** Determinați numerele reale a pentru care $M(a) \cdot M(a) \cdot M(1) = M(0)$.

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

TEST 1

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\Delta = 81 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = -8$ $A = \{1\}$	**3p** **2p**
2.	$f(2a) - f(a) = 9 \Leftrightarrow (6a-5) - (3a-5) = 9 \Leftrightarrow 6a - 5 - 3a + 5 = 9 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3a = 9 \Leftrightarrow a = 3$	**3p** **2p**
3.	număr de cazuri favorabile $= 16$; număr de cazuri posibile $= 90$ $P = \frac{16}{90} = \frac{8}{45}$	**3p** **2p**
4.	$3^x \cdot 5^x = 225 \Leftrightarrow 15^x = 225 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = 2$	**3p** **2p**
5.	$d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2 = -3$ $d_2: y - 1 = -3(x-2) \Leftrightarrow y = -3x + 7$	**2p** **3p**
6.	$A_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} \Leftrightarrow 4 \cdot AC = 40 \Leftrightarrow AC = 10$ $BC = 2\sqrt{29} \Longrightarrow cosB = \frac{AB}{BC} = \frac{2\sqrt{29}}{29}$	**2p** **3p**

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1.	$3 * 5 = 3;\ 6 * 4 = 6$ $(3 * 5) + (6 * 4) = 3 + 6 = 9$	**3p** **2p**
2.	$(x-3)(y-3) + 3 = xy - 3x - 3y + 9 + 3 =$ $= xy - 3x - 3y + 12 = x * y$, pentru orice numere reale x şi y.	**3p** **2p**
3.	$(log_2 x - 3)(log_3 x - 3) + 3 = 3 \Leftrightarrow (log_2 x - 3)(log_3 x - 3) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow log_2 x = 3$ sau $log_3 x = 3 \Leftrightarrow x = 8$ sau $x = 27$	**2p** **3p**
4.	$x * 3 = 3 * x = 3$, pentru orice număr real x $(\sqrt{1} * \sqrt{2} * \ldots * \sqrt{8}) * \sqrt{9} * \sqrt{10} = 3$	**2p** **3p**
5.	$(a^2-3)(b^2-3) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 3 = 1 \\ b^2 - 3 = 1 \end{cases} sau \begin{cases} a^2 - 3 = -1 \\ b^2 - 3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 4 \end{cases} sau \begin{cases} a^2 = 2 \\ b^2 = 2 \end{cases}$ a, b – numere întregi $\Longrightarrow a \in \{-2;\ 2\}$ *şi* $b \in \{-2;\ 2\} \Longrightarrow$ $\Longrightarrow (a; b) \in \{(2;2);\ (2;-2);\ (-2;2);\ (-2;\ -2)\}$	**3p** **2p**
6.	$(x+1) * (y-2) = (x-2) * (y+1) \Leftrightarrow (x-2)(y-5) = (x-5)(y-2) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow xy - 5x - 2y + 10 = xy - 2x - 5y + 10 \Leftrightarrow -3x = -3y \Leftrightarrow x = y$	**2p** **3p**

SUBIECTUL III **(30 de puncte)**

1.	$M(1)-2M(0)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$	**2p** **3p**
2.	$M(a)-I_2=\begin{pmatrix}-a & a\\ -2a & 2a\end{pmatrix}$ $det(M(a)-I_2)=-2a^2+2a^2=0$, pentru orice număr real a.	**2p** **3p**
3.	$M(a^2)-M(2a)=O_2\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1-a^2 & a^2\\ -2a^2 & 1+2a^2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1-2a & 2a\\ -4a & 1+4a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2a-a^2=0\Leftrightarrow a(a-2)=0\Leftrightarrow a\in\{0;2\}$	**2p** **3p**
4.	$M(x)\cdot M(y)=\begin{pmatrix}(1-x)(1-y)-2xy & y(1-x)+x(1+2y)\\ -2x(1-y)-2y(1+2x) & -2xy+(1+2x)(1+2y)\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}1-(x+y+xy) & x+y+xy\\ -2(x+y+xy) & 1+2(x+y+xy)\end{pmatrix}=M(x+y+xy)$, pentru orice numere reale x şi y.	**2p** **3p**
5.	$M(1)\cdot M(2)\cdot M(3)=M(1+2+2)\cdot M(3)=M(5)\cdot M(3)=$ $=M(5+3+15)=M(23)=\begin{pmatrix}-22 & 23\\ -46 & 47\end{pmatrix}$	**3p** **2p**
6.	$M(2a+a^2)\cdot M(1)=M(0)\Leftrightarrow M(2a^2+4a+1)=M(0)$ $2a^2+4a+1=0\Leftrightarrow a\in\left\{\frac{-2-\sqrt{2}}{2};\frac{-2+\sqrt{2}}{2}\right\}$	**3p** **2p**

„Numărul, ca şi armonia, nu admite falsitatea; aceasta le este lor cu totul străină... adevărul este înnăscut şi specific naturii numărului.Tot ce poate fi cunoscut are număr şi fără de număr nu cunoaştem nimic"

Philolaos din Tarent, sec.al V-lea î.e.n.

Filiera vocaţională, profilul pedagogic, specializarea învăţător-educatoare

Model de antrenament TEST 2

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I 30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $3\cdot\left[0,(1)+0,(2)\right]=1$.

5p **2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x-3$. Determinați numărul real a pentru care $f(a)=\frac{a}{2}$

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{3}$.

5p **4.** Un obiect care costa 1000 de lei a fost ieftinit cu 20%. Cu ce procent trebuie scumpit acest produs pentru a reveni la prețul inițial?

5p **5.** Arătați că $\cos^2 60^\circ+\cos^2 120^\circ+\sin^2 45^\circ=1$.

5p **6.** Calculați perimetrul triunghiului ABC știind că $AC=2\sqrt{3}, BC=4$ și $\cos C=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy-\frac{1}{2}(x+y)+\frac{3}{4}$.

5p **1**. Arătați că $\frac{3}{2}*1=1$.

5p **2.** Demonstrați că $x*y=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **3.** Determinați numerele reale x pentru care $x*x=\frac{1}{2}$.

5p **4**. Demonstrați că $(x*y)*z=x*(y*z)$, pentru orice numere reale x,y,z .

5p **5**. Determinați numerele reale x pentru care $4^{x^2-2x+\frac{1}{2}}*4^{x^2-2x+\frac{1}{2}}*4^{x^2-2x+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$.

5p **6.** Dați un exemplu de numere raționale p și q pentru care $p*q=2$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

Se consideră matricele $A(a)=\begin{pmatrix}a-1 & 1\\ 1 & a-1\end{pmatrix}$, $B(b)=\begin{pmatrix}1 & b+1\\ b+1 & 1\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale .

5p **1.** Calculaţi suma elementelor matricei $B(-1)-I_2$.

5p **2.** Determinați numerele reale a și b astfel încât $A(a)=B(b)$.

5p **3.** Demonstrați că $A(a)\cdot B(b)=B(b)\cdot A(a)$, pentru orice numere reale a și b .

5p **4**. Arătați că există un număr real a astfel încât $\frac{1}{\det(A)}\cdot\begin{pmatrix}a-1 & -1\\ -1 & a-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **5.** Demonstrați că suma elementelor matricei $A(a)\cdot B(b)$ este nulă dacă și numai dacă $a=0$ sau $b=-2$.

5p **6**. Aflați $X\in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A(3)\cdot X=B(-1)$.

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

TEST 2

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$0,(1)+0,(2)=\frac{1}{9}+\frac{2}{9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$	**3p**
	$3\cdot\frac{1}{3}=\frac{3}{3}=1$	**2p**
2.	$f(a)=\frac{a}{2}\Leftrightarrow 3a-3=\frac{a}{2}\Leftrightarrow$	**3p**
	$\frac{5a}{2}=3\Rightarrow a=\frac{6}{5}$	**2p**
3.	$\sqrt{x^2-1}=\sqrt{3}\uparrow^2\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\pm 2$	**3p**
	$\sqrt{(\pm 2)^2-1}=\sqrt{3}$	**2p**
4.	$1000-20\%\cdot 1000=800(lei)$	**3p**
	$800+p\%\cdot 800=1000\Rightarrow p\%=25\%$.	**2p**
5.	$\cos 60^\circ=\frac{1}{2};\cos 120^\circ=-\frac{1}{2};\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$	**3p**
	$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{4}{4}=1$	**2p**
6.	$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos A=12+16-24=4\Rightarrow AB=2$	**3p**
	$P_{\Delta ABC}=2+4+2\sqrt{3}=6+2\sqrt{3}$	**2p**

SUBIECTUL II **(30 de puncte)**

1.	$\frac{3}{2}*1=\frac{3}{2}\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}+1\right)+\frac{3}{4}=$	**3p**
	$=\frac{3}{2}-\frac{5}{4}+\frac{3}{4}=1$	**2p**
2.	$\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(y-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=xy-\frac{x}{2}-\frac{y}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=$	**3p**
	$=xy-\frac{1}{2}\cdot(x+y)+\frac{3}{4}=x*y,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$	**2p**
3.	$2\cdot(x*x)=1\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=0$	**3p**
	$\Leftrightarrow x-\frac{1}{2}=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$	**2p**
4.	$\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right]\left(z-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left[\left(y-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right]+\frac{1}{2}\Leftrightarrow$	**3p**
	$\Leftrightarrow\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)\right]\left(z-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left[\left(y-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)\right]+\frac{1}{2},\ \forall\, x,y\in\mathbb{R}$	**2p**

5.	$\left(4^{x^2-2x+\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 4^{x^2-2x+\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow 2^{2x^2-4x+1}=2^{-1}$ $\Leftrightarrow 2x^2-4x+2=0\Leftrightarrow 2(x-1)^2=0\Leftrightarrow x-1=0\Rightarrow x=1$	**3p** **2p**
6.	$p*q=2\Leftrightarrow\left(p-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(q-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=2\Leftrightarrow\left(p-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(q-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$ De exemplu, $p-\frac{1}{2}=3, q-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow p=\frac{7}{2},\quad q=1$ sunt numere raționale.	**2p** **2p** **1p**

SUBIECTUL III **(30 de puncte)**

1.	$B(-1)-I_2=\begin{pmatrix}1 & -1+1\\ -1+1 & 1\end{pmatrix}-I_2=I_2-I_2=0_2$ $0+0+0+0=0$.	**3p** **2p**
2.	$A(a)=B(b)\Leftrightarrow\begin{cases}a-1=1\\ b+1=1\end{cases}$ $\Rightarrow a=2, b=0$	**3p** **2p**
3.	$A(a)\cdot B(b)=\begin{pmatrix}a-1 & 1\\ 1 & a-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & b+1\\ b+1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b & ab+a-b\\ ab+a-b & a+b\end{pmatrix}$ $B(b)\cdot A(a)=\begin{pmatrix}1 & b+1\\ b+1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a-1 & 1\\ 1 & a-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b & ab+a-b\\ ab+a-b & a+b\end{pmatrix}$ $\Rightarrow A(a)\cdot B(b)=B(b)\cdot A(a), \forall a,b\in\mathbb{R}$	**2p** **2p** **1p**
4.	det (A) $\neq 0\Rightarrow a\in\mathbb{R}-\{0,2\}$ $\begin{pmatrix}\frac{a-1}{a^2-2a} & \frac{-1}{a^2-2a}\\ \frac{-1}{a^2-2a} & \frac{a-1}{a^2-2a}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow a=1\in\mathbb{R}-\{0,2\}$	**2p** **3p**
5.	$2(a+b)+2(ab+a-b)=0\Leftrightarrow a+b+ab+a-b=0\Leftrightarrow 2a+ab=0$ $\Leftrightarrow a(2+b)=0\Rightarrow a=0\ sau\ b=-2$	**2p** **3p**
6.	$A(3)\cdot X=B(-1)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}2a+c=1\\ 2b+d=0\\ a+2c=0\\ b+2d=1\end{cases}$ $\Rightarrow a=\frac{2}{3}, b=-\frac{1}{3}, c=-\frac{1}{3}, d=\frac{2}{3}, X=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.	**3p** **2p**

„Aritmetica este ştiinţa a ceea ce este par şi impar, a deosebirii dintre numere şi a relaţiilor dintre ele"

Platon - dialogul „Harmide sau despre înţelepciune"

Filiera vocaţională, profilul pedagogic, specializarea învăţător-educatoare

Model de antrenament TEST 3

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-3$. Determinați numărul real a știind că $|f(a)|=1$.

5p **2.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}=1$.

5p **3.** Determinați punctul de extrem al graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-x^2-3$

5p **4.** Arătați că mulțimea $A=\{x\in Z \mid |3x-4|\le 14\}$ are 10 elemente.

5p **5.** Scrieți ecuația carteziană generală a dreptei ce trece prin punctele $O(0,0)$ și $A(2,1)$.

5p **6.** Determinați măsurile unghiurilor triunghiului ABC astfel încât $m(\hat{C})=\frac{3}{2}m(\hat{B})=3m(\hat{A})$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=x+y-30$.

5p **1.** Demonstrați că legea "$*$" este asociativă.

5p **2.** Verificați că legea "$*$" admite element neutru $e=30$.

5p **3.** Demonstrați că, $\forall x\in\mathbb{R}, \exists x'\in\mathbb{R}$ astfel încât $x*x'=x'*x=30$.

5p **4.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^x*25^x=0$.

5p **5.** Arătați că numărul $n=30\cdot(\underbrace{30*30*...*30}_{31\ termeni})$ este pătrat perfect.

5p **6.** Arătați că numărul $\frac{1}{3+2\sqrt{2}}*\frac{1}{3-2\sqrt{2}}$ este număr întreg.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&0&a\\a&1&0\\0&a&1\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $0_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **1.** Pentru $a=1$, calculați determinantul matricei A.

5p **2.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\det(A)=0$.

5p **3.** Determinați numărul real a știind că $A^2+A-2I_3=0_3$.

5p **4.** Arătați că $\det(A+aI_3)=(2a+1)(a^2+a+1)$, pentru orice număr real a.

5p **5.** Rezolvați în mulțimea numerelor raționale ecuația $\det(A)=\frac{91}{64}$.

5p **6.** Arătați că, pentru fiecare pereche de numere raționale p și q, $q\neq 0$, există un număr rațional a astfel încât $\det(A)=\frac{p^3+q^3}{q^3}$.

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

TEST 3

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\lvert f(a)\rvert = 1 \Leftrightarrow \lvert a-3\rvert = 1 \Leftrightarrow a-3=\pm 1$ $a \in \{2,4\}$	**3p** **2p**
2.	$\frac{1}{\sqrt{2-x^2}} = 1 \uparrow^2 \Leftrightarrow 2-x^2=1 \Leftrightarrow x^2=1$ $\Rightarrow x=\pm 1$	**3p** **2p**
3.	$-\frac{b}{2a}=0,\ -\frac{\Delta}{4a}=-3$ Punctul de extrem este $V(0,-3)$.	**3p** **2p**
4.	$\lvert 3x-4\rvert \le 14 \Leftrightarrow -14 \le 3x-4 \le 14 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{10}{3},6\right]$ $x \in \left[-\frac{10}{3},6\right] \cap \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-3,-2,...5,6\}$, de unde concluzia .	**3p** **2p**
5.	$OA: \frac{x-x_O}{x_A-x_O} = \frac{y-y_O}{y_A-y_O} \Leftrightarrow \frac{x}{2}=\frac{y}{1} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y=\frac{x}{2} \Leftrightarrow x-2y=0$	**3p** **2p**
6.	$m(A)+m(B)+m(C)=180^0 \Leftrightarrow m(A)+2m(A)+3m(A)=180^0$ $m(A)=30^0, m(B)=60^0, m(C)=90^0$	**3p** **2p**

SUBIECTUL II **(30 de puncte)**

1.	$(x*y)*z = x*(y*z)\ \forall x,y,z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x+y-30)*z = x*(y*z-30)\ \forall x,y,z \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow (x+y-30)+z-30 = x+(y*z-30)-30 \Leftrightarrow x+y+z-60 = x+y+z-60\ \forall x,y,z \in \mathbb{R}$	**3p** **2p**
2.	$x*30 = 30*x = x, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x+30-30 = 30+x-30, \forall x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow x = x = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$	**3p** **2p**
3.	$\forall x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R}, x*x' = x'*x = 30 \Leftrightarrow x+x'-30 = x'+x-30 = 30$ $\Rightarrow x' = 60-x,\ \forall x' \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$	**3p** **2p**
4.	$5^x * 25^x = 0 \Leftrightarrow 5^{2x}+5^x-30=0 \Rightarrow 5^x \in \{-6,5\}$ Convine $5^x=5 \Rightarrow x=1$	**3p** **2p**
5.	$n = 30\cdot(\underbrace{30*30*...*30}_{31\ termeni}) \Leftrightarrow n = 30\cdot(31\cdot 30-30\cdot 30)$ $\Leftrightarrow n = 30\cdot 30 = 30^2$	**3p** **2p**
6.	$\frac{1}{3+2\sqrt{2}} * \frac{1}{3-2\sqrt{2}} = \frac{1}{3+2\sqrt{2}} + \frac{1}{3-2\sqrt{2}} - 30 = \frac{3-2\sqrt{2}}{9-8} + \frac{3+2\sqrt{2}}{9-8} - 30$. $\Leftrightarrow (3-2\sqrt{2}) + (3+2\sqrt{2}) - 30 = -24 \in \mathbb{Z}$	**3p** **2p**

SUBIECTUL III **(30 de puncte)**

1.	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1+1+0-0-0-0=$ $=1+1=2$.	**3p** **2p**
2.	$\det(A)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 1+a^3+0-0-0-0=0$ $\Leftrightarrow 1+a^3=0 \Leftrightarrow a^3=-1 \Rightarrow a=-1$	**3p** **2p**
3.	$A^2+A-2I_3=0_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & a^2 & 2a \\ 2a & 1 & a^2 \\ a^2 & 2a & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2=0 \\ 3a=0 \end{cases} \Rightarrow a=0$	**3p** **2p**
4.	$\det(A+aI_3)=\begin{vmatrix} 1+a & 0 & a \\ a & 1+a & 0 \\ 0 & a & 1+a \end{vmatrix} = (1+a)^3+a^3=$ $=(1+a+a)\left[(1+a)^2-(1+a)a+a^2\right]=(1+2a)(a^2+a+1)$	**2p** **3p**
5.	$\det(A)=\frac{91}{64} \Leftrightarrow a^3+1=\frac{91}{64} \Leftrightarrow a^3=\frac{27}{64} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a^3=\left(\frac{3}{4}\right)^3 \Rightarrow a=\frac{3}{4} \in \mathbb{Q}$	**3p** **2p**
6.	$\det(A)=\frac{p^3+q^3}{q^3} \Leftrightarrow a^3+1=\frac{p^3+q^3}{q^3} \Leftrightarrow a^3=\frac{p^3+q^3}{q^3}-1 \Leftrightarrow a^3=\frac{p^3}{q^3} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a^3=\left(\frac{p}{q}\right)^3 \Rightarrow a=\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$	**3p** **2p**

„A arăta cum se construiesc matematicile înseamnă să-i studiem fundamentele, dar dintr-un punct de vedere care ne-ar face să ne îndepărtăm mult de domeniul logicii... Matematicianul nu se ocupă decât de studiul deductiv; şi nu priveşte de altfel decât raţionamentul gata făcut, căci construcţia unui raţionament logic nu se face în mod logic. Astfel, închis în turnul său de fildeş, matematicianul se crede un triumfător, când în realitate nu-i decât o rotiţă într-o uzină logistică... Matematica nu-i decât un instrument pe care alţii, filozofii, fizicienii, inginerii îl vor folosi în mod util"

H. Lebesgue

Filiera vocaţională, profilul pedagogic, specializarea învăţător-educatoare

Model de antrenament **TEST 4**

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați suma primelor patru zecimale ale numărului $\frac{1}{6}$.

5p **2.** Se consideră ecuația $4x^2 + mx + 9 = 0$, unde m este număr real. Determinați numerele reale m pentru care ecuația admite soluții reale.

5p **3.** Determinați numărul de submulțimi cu trei elemente ale mulțimii $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ care au toate elementele numere pare.

5p **4.** Determinați numărul real x pentru care $2^{x+2} \cdot 4^{x+1} = 8^2$.

5p **5.** În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(5; 6), B(6; 5)$ şi $C(2; 7)$. Determinați panta înălțimii din A a triunghiului ΔABC.

5p **6.** Se consideră triunghiul ΔABC cu $AB = 5, AC = 4$ şi $m(\sphericalangle A) = 60°$. Determinați lungimea laturii BC.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție asociativă $x * y = 3xy + 3x + 3y + 2$.

5p **1**. Calculați $\frac{1}{3} * \left(-\frac{1}{3}\right)$.

5p **2.** Demonstrați că $x * y = 3(x + 1)(y + 1) - 1$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **3.** Determinați numerele reale x pentru care $-2 * x = 5$.

5p **4.** Calculați $lg1 * lg\left(\frac{1}{10}\right) * lg\left(\frac{1}{100}\right) *......* lg\left(\frac{1}{100000}\right)$.

5p **5.** Determinați numerele reale strict pozitive pentru care $log_2x * log_3x = -1$.

5p **6.** Demonstrați că $x * \frac{1}{x} < 0$, pentru orice număr real negativ x.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B(x; y) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & -1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, unde x, y sunt numere reale.

5p **1.** Arătați că $det(A) = -4$.

5p **2.** Arătați că $det(A - 2B(x; y)) = 0$, pentru orice numere reale x *şi* y.

5p **3.** Determinați numerele reale x şi y pentru care $A \cdot B(x; y) = B(x; y) \cdot A$.

5p **4.** Demonstrați că $B(x; y) \cdot B(x; y) = O_2$ dacă şi numai dac*ă* $x = 1$ *şi* $y = -1$.

5p **5.** Arătați că $B(x; y) \cdot B(x; y) = B(y; x) \cdot B(y; x)$ dacă şi numai dacă $B(x; y) = B(y; x)$.

5p **6.** Determinați numărul natural n astfel încât

$$1 \cdot B(1; 1) + 2 \cdot B(2; 2) + 3 \cdot B(3; 3) + ... n \cdot B(n; n) = \begin{pmatrix} 385 & 55 \\ 385 & -55 \end{pmatrix}.$$

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

TEST 4

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\frac{1}{6}=0{,}1666\ldots..$ $1+6+6+6=19$	**3p** **2p**
2.	$\Delta\geq 0 \Leftrightarrow m^2-144\geq 0 \Leftrightarrow$ $m\in(-\infty;-12]\cup[12;+\infty)$	**2p** **3p**
3.	Numerele pare sunt 2; 4; 6; 8. Submulțimile căutate sunt submulțimi ale mulțimii numerelor pare de o cifră Numărul de submulțimi $= C_4^3=4$	**3p** **2p**
4.	$2^{x+2}\cdot 2^{2x+2}=2^6 \Leftrightarrow x+2+2x+2=6 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3x+4=6 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$	**3p** **2p**
5.	$AD\perp BC \Leftrightarrow m_{AD}\cdot m_{BC}=-1$ $m_{BC}=-\frac{1}{2}\Rightarrow m_{AD}=2$	**2p** **3p**
6.	$BC^2=AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot cosA \Leftrightarrow BC^2=25+16-40\cdot\frac{1}{2}\Leftrightarrow$ $BC^2=21\Rightarrow BC=\sqrt{21}$	**3p** **2p**

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1.	$\frac{1}{3}*\left(-\frac{1}{3}\right)=3\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+3\cdot\frac{1}{3}-3\cdot\frac{1}{3}+2=$ $=-\frac{1}{3}+2=\frac{5}{3}$	**2p** **3p**
	$3(x+1)(y+1)-1=3(xy+x+y+1)-1=$ $=3xy+3x+3y+3-1=x*y$, pentru orice numere reale x şi y .	**3p** **2p**
3.	$3(-2+1)(x+1)-1=5 \Leftrightarrow -3(x+1)=6 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x+1=-2 \Leftrightarrow x=-3$	**3p** **2p**
4.	$x*(-1)=(-1)*x=-1$, pentru orice număr real x $0*(-1)*(-2)*\ldots(-5)=-1$	**2p** **3p**
5.	$3(log_2x+1)(log_3x+1)-1=-1 \Leftrightarrow log_2x=-1$ sau $log_3x=-1$ $x\in\left\{\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right\}$	**3p** **2p**
6.	$3(x+1)\left(\frac{1}{x}+1\right)<1 \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{x}<\frac{1}{3}\Leftrightarrow 3(x+1)^2>x; pentru\ orice\ x<0 \Leftrightarrow$ $3x^2+5x+3>0$, adevărat pentru orice număr real	**3p** **2p**

SUBIECTUL III **(30 de puncte)**

1.	$detA = 1 \cdot (-2) - 1 \cdot 2 =$ $= -2 - 2 = -4.$	**3p** **2p**
2.	$det\big(A - 2B(x,y)\big) = \begin{vmatrix} 1-2x & 0 \\ 1-2y & 0 \end{vmatrix} =$ $= (1-2x)\cdot 0 - (1-2y)\cdot 0 = 0$	**3p** **2p**
3.	$A \cdot B(x,y) = B(x,y)\cdot A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+2y & -1 \\ x-2y & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 & 2x-2 \\ y-1 & 2y+2 \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y = x+1 \\ 2x-2 = -1 \\ x-2y = y-1 \\ 2y+2 = 3 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}.$	**3p** **2p**
4.	$B^2(x,y) = O_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x^2+y & x-1 \\ xy-y & y+1 \end{pmatrix} = O_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y=0 \\ x-1=0 \\ xy-y=0 \\ y+1=0 \end{cases} \Rightarrow$ $\Rightarrow x = 1, y = -1.$	**3p** **2p**
5.	$B(x;y)\cdot B(x;y) = B(y;x)\cdot B(y;x) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x^2+y & x-1 \\ xy-y & y+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y^2 & y-1 \\ xy-x & x+1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow B(x;y) = B(y;x)$	**3p** **2p**
6.	$\begin{pmatrix} 1^2 & 1 \\ 1^2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2^2 & 2 \\ 2^2 & -2 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} n^2 & n \\ n^2 & -n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 385 & 55 \\ 385 & -55 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} 1^2+2^2+\ldots+n^2 = 385 \\ 1+2+3+\ldots.+n = 55 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 385 \\ \frac{n(n+1)}{2} = 55 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow n = 10$	**3p** **2p**

„Fiecare dintre concepţiile noastre principale, fiecare ramură a cunoştinţelor noastre trece în mod succesiv prin trei stări teoretice diferite: - starea teologică sau fictivă, starea metafizică sau abstractă şi starea ştiinţifică sau pozitivă. Astfel, a spus într-o zi Auguste Compte şi formula, rezistând victorioasă încercării faptelor, a rezumat până aici, în mod fidel, istoria intelectuală a omenirii. Suntem oare din întâmplare la o cotitură a acestei istorii? Căci iată un fenomen straniu, fără precedent în istoria gândirii. O ştiinţă ajunsă în starea pozitivă este în curs de a-şi schimba drumul ca să revină la starea metafizică. Iar această ştiinţă este cea mai simplă, cea mai veche, cea mai perfectă dintre toate, anume matematica"

F. Gonseth – „Fundamentele matematicii"

Filiera vocaţională, profilul pedagogic, specializarea învăţător-educatoare

Model de antrenament **TEST 5**

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $-1{,}75 \cdot 0,(6) + 1\frac{1}{6} = 0$.

5p **2.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = 2x^2 - 5x + 2$. Determinați numerele reale x pentru care $f(2x) \leq 0$.

5p **3.** Determinați numărul real nenul x pentru care $4 \cdot \sqrt[3]{x^{-1}} + 12 = 0$.

5p **4.** Determinați numărul real strict pozitiv x pentru care

$$2 \cdot \log_3 x = \log_3\left(5 - \sqrt{7}\right) + \log_3\left(5 + \sqrt{7}\right) - \log_3 2 .$$

5p **5.** În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(2;0), B(-4;3)$ şi $C(m; m+2)$. Determinați numărul real m astfel încât punctele să fie coliniare.

5p **6.** Se consideră vectorii $\vec{a} = \vec{\imath} + \vec{\jmath};\ \vec{b} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$ și $\vec{u} = 6\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$. Determinați numerele reale p şi q astfel încât $\vec{u} = p \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b}$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = xy - 4x - 4y + 20$.

5p **1**. Arătați că $x * y = (x-4)(y-4) + 4$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **2.** Determinați numerele reale x pentru care $x^2 * x = 4$.

5p **3.** Arătați că $e = 5$ este element neutru în raport cu legea de compoziție $*$.

5p **4.** Determinați elementele simetrizabile ale mulțimii $\mathbb{R}$ în raport cu $*$.

5p **5.** Determinați numerele întregi x pentru care $|3^x * 6| \leq 2$.

5p **6.** Demonstrați că numărul $a = (n * n * n) - n$ este divizibil cu 6, pentru orice număr întreg n.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix};\ M(a) = A + aI_2\ și\ I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **1.** Arătaţi că $M(3) - M(0) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

5p **2.** Demonstraţi că $A \cdot A \cdot A = A$.

5p **3.** Determinați numărul real a pentru care $\det M(a) = 2$.

5p **4.** Demonstrați că $M(a+2) - M(a) = M(3) - M(1)$, pentru orice număr real a.

5p **5.** Determinați perechile de numere naturale $(x; y)$ pentru care $A \cdot \begin{pmatrix} x^2 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$.

5p **6.** Calculați suma $S = M(1) + M(2) + M(4) + \ldots.. M(128)$.

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

TEST 5

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$-\frac{175}{100}\cdot\frac{6}{9}+\frac{7}{6}=-\frac{7}{4}\cdot\frac{2}{3}+\frac{7}{6}=$ $=0$	**3p** **2p**
2.	$8x^2-10x+2\le 0 \Leftrightarrow 4x^2-5x+1\le 0$ $x\in\left[\frac{1}{4};1\right]$	**2p** **3p**
3.	$4x^{-\frac{1}{3}}=-12 \Leftrightarrow x^{-\frac{1}{3}}=-3 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}=-3 \Leftrightarrow$ $\frac{1}{x}=-27 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{27}$	**3p** **2p**
4.	$\log_3(x^2)=\log_3\left(\frac{(5-\sqrt{7})(5+\sqrt{7})}{2}\right) \Leftrightarrow \log_3(x^2)=\log_3 9 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2=9 \Rightarrow x=3$	**3p** **2p**
5.	$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \\ m & m+2 & 1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow -9m-6=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow m=-\frac{2}{3}$	**3p** **2p**
6.	$6\vec{i}+2\vec{j}=p\cdot(\vec{i}+\vec{j})+r\cdot(\vec{i}-\vec{j}) \Leftrightarrow \begin{cases} p+r=6 \\ p-r=2 \end{cases}$ $\Rightarrow p=4; r=2$	**3p** **2p**

SUBIECTUL II **(30 de puncte)**

1.	$(x-4)(y-4)+4=xy-4x-4y+16+4=$ $=xy-4x-4y+20=x*y$, pentru orice numere reale x şi y	**3p** **2p**
2.	$(x^2-4)(x-4)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)(x-4)=0 \Rightarrow$ $x\in\{-2;2;4\}$	**3p** **2p**
3.	$x*5=x$, pentru orice număr real x $5*x=x$, pentru orice număr $real\ x \Rightarrow e=5$ este element neutru	**2p** **3p**
4.	x- simetrizabil $\Leftrightarrow \exists x'\in\mathbb{R}$ astfel încât $x*x'=e=x'*x \Leftrightarrow (x-4)(x'-4)=1$ $x'=4+\frac{1}{x-4}$, pentru orice $x\neq 4 \Rightarrow x\in\mathbb{R}\setminus\{4\}$ simetrizabil	**2p** **3p**
5.	$-2\le(3^x-4)(6-4)+4\le 2 \Leftrightarrow -3\le 3^x-4\le -1 \Leftrightarrow 1\le 3^x\le 3$ $0\le x\le 1; x\in\mathbb{Z} \Rightarrow x\in\{0;1\}$	**3p** **2p**
6.	$(n*n)*n=[(n*n)-4](n-4)+4=(n-4)^3+4$ $\mathrm{a}=(\mathrm{n}-4)[(\mathrm{n}-4)^2-1] \Leftrightarrow \mathrm{a}=(\mathrm{n}-5)(\mathrm{n}-4)(\mathrm{n}-3)$; a $\vdots$ 6, ca produs de trei numere întregi consecutive	**2p** **3p**

SUBIECTUL III **(30 de puncte)**

1.	$M(3)-M(0)=A+3I_2-A=$ $=3I_2=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	**3p** **2p**

2.	$A \cdot A = A$	**3p**
	$(A \cdot A) \cdot A = A \cdot A = A$	**2p**
3.	$\det M(a) = \begin{vmatrix} 2+a & 1 \\ -2 & a-1 \end{vmatrix} = a^2 + a$	**3p**
	$a^2 + a = 2 \Longrightarrow a \in \{-2; 1\}$	**2p**
4.	$M(a+2) - M(a) = A + (a+2)I_2 - A - aI_2 = 2I_2$	**2p**
	$M(3) - M(1) = A + 3I_2 - A - I_2 = 2I_2 = M(a+2) - M(a)$	**3p**
5.	$\begin{pmatrix} 2x^2 + y \\ -2x^2 - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2x^2 + y = 5$	**3p**
	$x^2 \in \{0; 1\} \Leftrightarrow x \in \{0; 1\} \Longrightarrow (x; y) \in \{(0; 5); (1; 3)\}$	**2p**
6.	S$= \begin{pmatrix} 2+1 & 1 \\ -2 & -1+1 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 2+2^7 & 1 \\ -2 & -1+2^7 \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} 16 + (1 + 2 + \ldots + 2^7) & 8 \\ -16 & -8 + (1 + 2 + \ldots + 2^7) \end{pmatrix} =$	**2p**
	$= \begin{pmatrix} 16 + 2^8 - 1 & 8 \\ -16 & -8 + 2^8 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^8 + 15 & 8 \\ -16 & 2^8 - 9 \end{pmatrix}$	**3p**

„Matematica şi poezia - oricât ar părea de contradictorii aceşti doi termeni la prima vedere, există undeva, în domeniul înalt al geometriei, un loc luminos unde se întâlneşte cu poezia. Această convergenţă, această accedere într-un loc înalt şi luminos a rămas în permanenţă - ca orice tendinţă spre absolut - o aspiraţie, o sete niciodată deplin satisfăcută. Efortul spre totalitate este, de fapt, unul de recuperare a omului integral, nescindat."

Ion Barbu/Dan Barbilian

Inspectoratul Școlar Județean
Iași

Matematică

Succes!

BACALAUREAT 2020